Série 13B ($\star$)

Le but de cette série supplémentaire est de démontrer le

Théorème de Stone-Weierstrass

Pour tout $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f.

1. Commencer par montrer que l'on peut se restreindre au cas $f(0) = f(1) = 0$, en considérant la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)].$$

2. On définit $Q_n(x) = c_n(1-x^2)^n$ où $c_n \in \mathbb{R}$ est choisi tel que
$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,\mathrm{d}x = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
Montrer que $c_n < \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Indication : Prouver et utiliser l'inégalité $(1-x^2)^n \geq 1 - nx^2$, $x \in [0,1]$.

3. Montrer que $Q_n \to 0$ uniformément sur $[\delta, 1]$ pour tout $\delta \in (0,1)$.

4. On étend maintenant sur tout $\mathbb{R}$ la fonction $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ satisfaisant $f(0) = f(1) = 0$ en posant $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$. On obtient ainsi une fonction continue que l'on note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par
$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t) Q_n(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un polynôme.

5. Prouver que $P_n \to f$ uniformément sur $[0,1]$ en utilisant la continuité uniforme de f.