Série 12

1. Etudier dans chaque cas la représentation de f en série de Taylor autour de zéro en suivant les étapes :
   (i) écrire la formule de Taylor d'ordre $n \in \mathbb{N}$ (avec reste de Lagrange) ;
   (ii) déterminer le rayon de convergence $R > 0$ de la série de Taylor correspondante ;
   (iii) prouver que la série de Taylor converge uniformément vers f sur le domaine donné.

   (a) $f : [-\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1+x)$; (b) $f : [-\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = (1+x)^\alpha$ $(\alpha > 0)$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
   Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et déterminer le D.L. d'ordre n de f en zéro, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Utiliser une série entière pour retrouver le résultat
$$\ln(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$
   démontré à l'exercice 5, série 5.

4. Etudier la fonction $f(x) = x^x$, et trouver sa représentation graphique.

5. Démontrer les formules suivantes :
$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y); \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y); \end{aligned}$$
$$\sinh(x) = \frac{2\tanh(x/2)}{1-\tanh^2(x/2)}; \quad \cosh(x) = \frac{1+\tanh^2(x/2)}{1-\tanh^2(x/2)}.$$

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\sinh\frac{x}{2} + \cosh\frac{x}{2}\coth x = -\frac{7}{6}e^{-x/2}.$$

7. Prouver que
$$\operatorname{argtanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad \forall x \in (-1, 1).$$

8. Calculer, là où elles sont définies, les dérivées des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = \arcsin(\tanh x)$; (b) $f(x) = \operatorname{argtanh}(\tan x)$; (c) $f(x) = (2x^2+1)\operatorname{argsinh} x - x\sqrt{1+x^2}$.

9. Calculer les limites suivantes :
$$\text{(a)} \lim_{x\to+\infty}(x+2^x)^{1/x}; \quad \text{(b)} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{argtanh} x - \arctan x}{\sinh x - \sin x}; \quad \text{(c)} \lim_{x\to 0^+} x^{\sinh x}.$$

10. Etudier la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{cotanh} x := \dfrac{\cosh x}{\sinh x}$, et trouver sa représentation graphique.