

SÉRIE 11

1. Déterminer les développements limités des fonctions suivantes autour du point a et à l'ordre n donnés :

(a) $f(x) = \arcsin(x)$, $a = 0$, $n = 5$; (b) $f(x) = \arcsin(x)$, $a = 1/2$, $n = 3$;
 (c) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$, $a = 0$, $n = 4$; (d) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$, $a = 1$, $n = 4$;
 (e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $a = 0$, $n = 3$; (f) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$, $a = 1$, $n = 4$;
 (g) $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$, $a = \pi/4$, $n = 3$.

2. Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+x^2}}{x^2}$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)}{x^5}$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \arcsin(x) - 6x - x^3}{x^5}$;
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(\sin(x)) - \sin^2(x)}{x^6}$; (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \ln(1+x)}$.

3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites de fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$, et deux fonctions $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$, telles que $f_n \xrightarrow{U} f$ et $g_n \xrightarrow{U} g$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Prouver que $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{U} \alpha f + \beta g$.

4. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy ssi il existe une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_n \xrightarrow{U} f$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

5. Etudier la convergence (ponctuelle et uniforme) de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{nx^2 + 1}{nx + 1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

sur les intervalles $[0, \infty)$, $(0, \infty)$ et $[1, \infty)$.

6. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{nx^2 + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction dérivable sur $[-1, 1]$, la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ponctuellement, mais $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$. Comparer cette situation avec les hypothèses du théorème de dérivation des suites de fonctions.

7. Etudier la convergence (ponctuelle et uniforme) de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(x) = nx^n(1-x), \quad n \in \mathbb{N},$$

sur les intervalles $[0, 1]$ et $[0, c]$, pour $c \in (0, 1)$.