

2. (a) On décompose

$$\int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy = \int_0^1 y^{x-1} e^{-y} dy + \int_1^\infty y^{x-1} e^{-y} dy.$$

Pour tout  $x > 0$  et  $0 < y < 1$ , on a  $0 < y^{x-1} e^{-y} < y^{x-1}$ . Comme la fonction  $y \mapsto y^{x-1}$  est intégrable sur  $(0, 1)$  pour tout  $x > 0$ , on conclut que  $\int_0^1 y^{x-1} e^{-y} dy$  converge pour tout  $x > 0$ .

Pour l'intégrale sur  $(1, \infty)$ , on distingue les cas. Pour tout  $0 < x \leq 1$  et  $y > 1$ , on a  $0 < y^{x-1} e^{-y} < e^{-y}$ . Comme  $y \mapsto e^{-y}$  est intégrable sur  $(1, \infty)$ , on conclut que  $\int_1^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$  converge pour tout  $0 < x \leq 1$ . Supposons maintenant  $x > 1$ . On applique la forme limite du critère de comparaison avec  $f(y) = y^{x-1} e^{-y}$  et  $g(y) = e^{-y/2}$ . On a

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} y^{x-1} e^{-y/2} = 0$$

et  $g$  est intégrable sur  $(1, \infty)$ , donc  $\int_1^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$  converge pour tout  $x > 1$ .

(b) En intégrant par partie, on a

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty y^x e^{-y} dy = -y^x e^{-y} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty xy^{x-1} e^{-y} dy = x\Gamma(x).$$

(c) En itérant l'identité obtenue au point (b) avec  $x = n \in \mathbb{N}$ , on obtient bien

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-2) = \dots = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n!$$

car  $\Gamma(1) = 1$ .

4. (a) En faisant le changement de variable  $s = xt$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (f(x) + g(x)) &= f'(x) + g'(x) = 2 \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right) e^{-x^2} + \int_0^1 (-2x) e^{-x^2(t^2+1)} dt \\ &= 2e^{-x^2} \left( \int_0^x e^{-t^2} dt - \int_0^1 x e^{-x^2 t^2} dt \right) \\ &= 2e^{-x^2} \left( \int_0^x e^{-t^2} dt - \int_0^1 e^{-(xt)^2} d(xt) \right) \\ &= 2e^{-x^2} \left( \int_0^x e^{-t^2} dt - \int_0^x e^{-s^2} ds \right) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction  $f + g$  est constante sur  $\mathbb{R}$ , donc  $f(x) + g(x) = f(0) + g(0) = \pi/4$ .

(b) On remarque que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} = 0, \quad \forall t \in [0, 1].$$

En échangeant limite et intégrale,<sup>1</sup> on obtient alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  et l'on déduit du point (a) que

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \left( \int_0^\infty e^{-t^2} dt \right)^2,$$

d'où le résultat.

5. (a) En intégrant par parties, on obtient facilement que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}, \quad \forall n \geq 2. \tag{1}$$

1. Puisque  $\frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} \leq e^{-x^2}$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a que  $\frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} \rightarrow 0$  uniformément en  $t \in [0, 1]$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ . Ceci permet de justifier l'échange de la limite et de l'intégrale, en suivant la preuve du théorème 8.5.1. La dérivée par rapport à  $x$  sous l'intégrale dans le calcul de  $g'(x)$  au point (a) est plus délicate à justifier dans le cadre de l'intégrale de Riemann...

Par ailleurs,

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = 1.$$

On en déduit que

$$I_{2k} = \frac{(2k-1) \cdot (2k-3) \cdots 3 \cdot 1}{(2k) \cdot (2k-2) \cdots 4 \cdot 2} I_0 = \frac{(2k) \cdot (2k-1) \cdot (2k-2) \cdot (2k-3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{((2k) \cdot (2k-2) \cdots 2)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{\pi}{2}$$

et

$$I_{2k+1} = \frac{(2k) \cdot (2k-2) \cdots 4 \cdot 2}{(2k+1) \cdot (2k-1) \cdots 3 \cdot 1} I_1 = \frac{((2k) \cdot (2k-2) \cdots 2)^2}{(2k+1) \cdot (2k) \cdot (2k-1) \cdot (2k-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!}.$$

(b) Pour tout  $0 \leq x \leq \pi/2$ , on a  $0 \leq \sin(x) \leq 1$ . Ainsi,

$$\sin^{n-1}(x) \geq \sin^n(x) \geq 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall x \in [0, \pi/2],$$

ce qui entraîne  $\sin^{n-1}(x) \geq \sin^n(x) \geq 0$ , d'où  $I_{n-1} \geq I_n > 0$ , pour tout  $n \geq 1$ . Par (1), on a alors

$$\frac{n-1}{n} = \frac{I_n}{I_{n-2}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1, \quad \forall n \geq 2.$$

Il suit donc du principe des deux gendarmes que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{I_{n-1}} = 1$ .

(c) Par les points (a) et (b), on a que

$$1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{2 \cdot 4 \cdots (2k-2) \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)} \right]^2 \frac{1}{2k+1} \frac{2}{\pi} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{2 \cdot 4 \cdots (2k-2) \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)} \right]^2 \frac{1}{k\pi},$$

d'où la formule de Wallis :  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left[ \frac{2 \cdot 4 \cdots (2k-2) \cdot (2k)}{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)} \right]^2 = \pi$ , qui s'écrit également  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \frac{(2^k k!)^4}{((2k)!)^2} = \pi$ .

Par les formules établies au point (a), on en déduit que  $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

(d) Finalement, on trouve  $\ell^{-1} = \sqrt{2\pi}$  en injectant l'estimation  $n! \sim \ell^{-1} \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  dans les factoriels qui apparaissent dans la formule  $I_{2k} = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \frac{\pi}{2}$  et en utilisant l'estimation précédente,  $I_{2k} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4k}}$ .

6. (a) En intégrant par partie, il vient

$$\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin^2(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \implies \int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \arcsin^2(x) \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{8}.$$

(b) En utilisant l'indication, on obtient

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{-1/2} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2}) \cdots (-\frac{1}{2} - (k-1))}{k!} (-x^2)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{5}{2}) \cdots (-\frac{1}{2} - (k-1))}{k!} x^{2k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} x^{2k}, \quad \forall x \in (-1, 1). \end{aligned} \tag{2}$$

On déduit en intégrant que<sup>2</sup>

$$\arcsin(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad \forall x \in (-1, 1). \tag{3}$$

<sup>2</sup> Le rayon de convergence de la série entière dans l'équation (2) est égal à 1 et le théorème 7.2.9 donne la relation entre (2) et (3) sur l'intervalle  $(-1, 1)$ .

(c) Par les points (a) et (b), nous avons que<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{8} &= \int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} \frac{1}{2k+1} \int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)} \frac{1}{2k+1} \int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx.\end{aligned}$$

Par le changement de variable  $x = \sin(t)$ , nous obtenons

$$\int_0^1 \frac{x^{2k+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1}(t) dt = I_{2k+1} = \frac{(2k) \cdot (2k-2) \cdots 4 \cdot 2}{(2k+1) \cdot (2k-1) \cdots 3 \cdot 1},$$

d'où

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ \Rightarrow \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

---

3. L'échange de la somme et de l'intégrale peut être justifié par le théorème 8.5.1 du cours ou par le théorème de convergence dominée de Lebesgue.