CORRIGÉ 7

1. On remarque tout d'abord que $f(x)+1/f(x)\geq 2$ pour tout $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$. Par hypothèse, pour $\varepsilon>0$ donné, il existe $\delta>0$ tel que
$$0\leq f(x)+\frac{1}{f(x)}-2<\varepsilon,\quad \text{si } |x|<\delta,$$
ce qui équivaut à
$$0\leq \big(f(x)-1\big)+\Big(\frac{1}{f(x)}-1\Big)<\varepsilon,\quad \text{ou encore}\quad 0\leq \big(f(x)-1\big)\Big(1-\frac{1}{f(x)}\Big)<\varepsilon,\quad \text{si } |x|<\delta.$$
En élevant au carré, on obtient
$$0\leq (f(x)-1)^2+\Big(\frac{1}{f(x)}-1\Big)^2-2\big(f(x)-1\big)\Big(1-\frac{1}{f(x)}\Big)<\varepsilon^2$$
d'où $(f(x)-1)^2<\varepsilon^2+2\varepsilon$ si $|x|<\delta$. $\square$

2. Il suffit de remarquer que
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-\big(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\big)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2},$$
et de poser $\hat f(x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ et $\hat f(0)=1/2$.

3. (a) Puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{x+1}=-1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+2}{x(x+1)}=+\infty$, la fonction f n'est pas prolongeable par continuité en $x=0$. On remarque aussi qu'elle a une asymptote verticale en $x=-1$, avec $\displaystyle\lim_{x\to -1^\pm}f(x)=\mp\infty$ (mais ces limites sont immédiates, il n'y pas de forme indéterminée en $x=-1$).

(b) En utilisant les résultats $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2}=1$ vus au cours et ci-dessus, on a que
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{(1-\cos x)(3-\cos x)}}{|x|\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{\frac{x^2}{2}(3-\cos x)}}{|x|x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{3-\cos x}{2}}=1.$$
Donc f est prolongeable par continuité en $x=0$ et son prolongement est la fonction $\hat f:(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ définie par $\hat f(x)=f(x)$ pour tout $x\in(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ et $\hat f(0)=1$.

4. Soit $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et posons $\varepsilon=1/2$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $\delta>0$ il existe $x\in\mathbb{Q}$ tel que
$$|x-a|<\delta\quad\text{mais}\quad |f(x)-f(a)|=|1-0|=1>\varepsilon.$$
Donc f est discontinue en tout point $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Le même argument, utilisant cette fois la densité de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, montre que f est discontinue en tout point $a\in\mathbb{Q}$.

5. Soit $a\in\mathbb{R}$ et $(x_n)\subset\mathbb{Q},(y_n)\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ des suites qui convergent vers a. On a alors, par la continuité des fonctions puissance,
$$f(x_n)=x_n^3+1\to a^3+1\quad\text{et}\quad f(y_n)=y_n^2+y_n\to a^2+a.$$
On obtient donc une condition nécessaire pour que f soit continue en a : $a^3+1=a^2+a$. Cette équation s'écrit $(a+1)(a-1)^2=0$, d'où les solutions $a=\pm1$. Donc f est discontinue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$.

Nous prouvons maintenant que f est continue en $a=\pm1$. Pour $a=-1$, $f(a)=0$ et on a $x^3+1\to 0$ ($\mathbb{Q}\ni x\to -1$) et $x^2+x\to 0$ ($\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ni x\to -1$). En $a=1$, $f(a)=2$, et on bien $x^3+1\to 2$ ($\mathbb{Q}\ni x\to 1$) et $x^2+x\to 2$ ($\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ni x\to 1$). En résumé, $a=\pm1$ sont les seuls points de continuité de f.

6. Notons $\ell=\lim_{x\to\infty}f(x)$ et fixons $\varepsilon>0$. Il existe alors $b>a$ tel que $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ pour tout $x\geq b$, d'où $|f(x)|\leq\ell+\varepsilon$ pour tout $x\geq b$. Par ailleurs, par le théorème du min-max, il existe $M\geq 0$ tel que $|f(x)|\leq M$ pour tout $x\in[a,b]$. On a ainsi que $|f(x)|\leq\max\{M,\ell+\varepsilon\}$ pour tout $x\in[a,\infty)$. $\square$

7. Prendre, par exemple, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x\in(0,1),\\ 0 & \text{si } x\in\{0,1\}.\end{cases}$

8. Prendre, par exemple, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases}\sin(1/x) & \text{si } x\in(0,1],\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

9. Si f est continue sur $[a,b]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$x, y \in [a,b],\ |x-y| < \delta \implies \big||f(x)| - |f(y)|\big| \le |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

ce qui montre que $|f|$ est aussi continue. Un contre-exemple à la réciproque est donné par la fonction

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1,0], \\ 1 & \text{si } x \in (0,1]. \end{cases}$$

10. (a) La fonction $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1/x - 1$ est continue comme composée de fonctions continues. Par ailleurs, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. On peut donc trouver $a, b \in (0,\infty)$ tels que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, et le théorème de la valeur intermédiaire donne alors un $x \in (a,b)$ tel que $f(x) = 0$.

(b) La fonction $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 2$, est continue comme composée de fonctions continues, et on a $f(0) = -1 < 0$ et $f(2) = e^2 - 4 > 0$, donc il existe $x \in (0,2)$ tel que $f(x) = 0$.

(c) La fonction $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x + \ln(x) + \sin(x)$, est continue comme composée de fonctions continues, et satisfait $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Donc il existe $x \in (0,\infty)$ tel que $f(x) = 0$.

11. La fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) - x$, est continue comme composée de fonctions continues. Par ailleurs, $F(a) = f(a) - a \ge 0$ et $F(b) = f(b) - b \le 0$, donc il existe $x \in [a,b]$ tel que $F(x) = 0$.

12. Supposons par l'absurde qu'il existe $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$, tels que $f(a) \ne f(b)$. Puisque f est continue, le théorème de la valeur intermédiaire assure que f prend toutes les valeurs réelles dans l'intervalle entre $f(a)$ et $f(b)$, ce qui contredit l'hypothèse que $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

13. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ telle que $x_n \to x$. Alors $f(x_n) \to f(x)$ et $g(x_n) \to g(x)$ par la continuité des fonctions f et g. Par passage à la limite, la relation $f(x_n) \ge g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ implique donc $f(x) \ge g(x)$, ce qui prouve (a). Le point (b) se déduit du point (a) en supposant que $f(x) \le g(x)$ et $f(x) \ge g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

14. On remarque tout d'abord que $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme f n'est pas constante, il existe au moins un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \ne 0$. Alors la relation précédente donne $f(0) = 1$. Par suite,

$$1 = f(0) = f(x-x) = f(x)f(-x) \implies f(-x) = f(x)^{-1} \text{ et } f(x) \ne 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nous montrons maintenant que f est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $(y_n) \subset \mathbb{R}$ une suite telle que $y_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Nous avons alors, par la continuité de f au point x_0,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(x + y_n) &= \lim_{n\to\infty} f(x - x_0 + x_0 + y_n) = f(x - x_0) \lim_{n\to\infty} f(x_0 + y_n) \\ &= f(x - x_0) f(x_0) = f(x) f(x_0)^{-1} f(x_0) = f(x), \end{aligned}$$

ce qui montre que f est continue au point x. Comme $x \in \mathbb{R}$ est quelconque, f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

Une conséquence importante des points précédents est que $f > 0$ sur $\mathbb{R}$. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) < 0$. Comme $f(0) = 1$, le théorème de la valeur intermédiaire implique l'existence d'un x dans l'intervalle d'extrémités x_1 et 0, tel que $f(x) = 0$ ↯

On observe maintenant que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$f(nt) = f(\underbrace{t + \cdots + t}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{f(t) \ldots f(t)}_{n \text{ fois}} = f(t)^n.$$

Un argument similaire montre que $f(-nt) = f(t)^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. On a donc $f(kt) = f(t)^k$, pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $t \in \mathbb{R}$. Maintenant, pour $r \in \mathbb{Q}$, écrivons $r = p/q$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$f(t)^p = f(pt) = f(qrt) = f(rt)^q \implies f(rt) = f(t)^r, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Posant $t = 1$ et $a = f(1) > 0$, on a ainsi que $f(x) = a^x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. Puisque les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto a^x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, il découle de l'exercice 13 (b) que $f(x) = a^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. □