Corrigé 5

1. On raisonne par l'absurde. La négation de $|y_n| \to \infty$ est : il existe une sous-suite de (y_n) qui est bornée. En appliquant le théorème de Bolzano–Weierstrass à cette sous-suite, nous pouvons en extraire une nouvelle sous-suite qui converge. Notons cette sous-suite (y_{n_k}) et sa limite y. On montre alors que $y_{n_k} \in \mathbb{Z}^* \ \forall k \Rightarrow y \in \mathbb{Z}^*$. On extrait maintenant de (x_n) la sous-suite correspondante (x_{n_k}). Par hypothèse, on a alors

$$\ell = \lim_{k\to\infty} \frac{x_{n_k}}{y_{n_k}} \implies x = \ell y.$$

Or $x \in \mathbb{Z}$, mais $\ell y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Cette contradiction montre que $|y_n| \to \infty$.

2. (a) Pour $n, m \geq 1$, l'inégalité triangulaire donne simplement

$$|x_n - x_m| = \Big|\frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{(-1)^{m-1}}{m}\Big| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m},$$

ce qui montre que (x_n) est une suite de Cauchy. En effet, pour $\varepsilon > 0$ donné, prenons $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $N > 2/\varepsilon$. Alors,

$$|x_n - x_m| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

(b) Montrons que (x_n) n'est pas de Cauchy, i.e. : $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n, m \geq N$ tels que $|x_n - x_m| \geq \varepsilon$. Puisque $|x_n - x_{n+1}| = 2 \ \forall n \geq 1$, il suffit de prendre $\varepsilon = 1$ et $n = N$, $m = N+1$, quel que soit $N \in \mathbb{N}$.

(c) Puisque $x_n > 0 \ \forall n \geq 0$ (récurrence triviale), nous avons que

$$|x_{n+1} - x_n| = \Big|\frac{x_n - x_{n-1}}{(x_n+2)(x_{n-1}+2)}\Big| < \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2^n}|x_1 - x_0|, \quad \forall n \geq 1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |x_{n+k} - x_n| &< |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &< \underbrace{\Big(\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-2}} + \cdots + 1\Big)}_{<2} |x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^{n-1}}|x_1 - x_0|, \quad \forall n, k \geq 1, \end{aligned}$$

ce qui montre que (x_n) est de Cauchy. Par conséquent, elle est convergente et sa limite $\ell \geq 0$ satisfait l'équation $x = (x+1)/(x+2) \implies \ell = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$.

3. (a) $\displaystyle \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \implies \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$

(b) $$\begin{aligned} \frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\Big) \implies \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)} &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k'=4}^{n+3} \frac{1}{k'} \\ &= \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\Big) \to \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big) = \frac{11}{18} \end{aligned}$$

(c) $\displaystyle \frac{2k-1}{k^2(k-1)^2} = \frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2} \implies \sum_{k=2}^{n} \frac{2k-1}{k^2(k-1)^2} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{n^2} \to 1$

(d) Notant $\displaystyle s_n := \sum_{k=1}^{n} k a^k$, on a

$$\begin{cases} s_n = a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + na^n \\ as_n = a^2 + 2a^3 \cdots + (n-1)a^n + na^{n+1} \end{cases} \implies (1-a)s_n = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n - na^{n+1}.$$

Or, $a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = a(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) = a\frac{1-a^n}{1-a}$ par la formule de la somme géométrique. Ainsi, comme $a \in (-1, 1)$, on obtient

$$s_n = \frac{a\frac{1-a^n}{1-a} - na^{n+1}}{1-a} = \frac{a - a^{n+1} - na^{n+1} + na^{n+2}}{(1-a)^2} \to \frac{a}{(1-a)^2}.$$

4. (a) On considère une série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ avec $x_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. On note $s_m := \sum_{n=1}^{m} x_n,\ m \geq 1$, le terme général de la suite des sommes partielles. Supposons que (s_m) est bornée supérieurement. Comme $x_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, (s_m) est aussi croissante, donc convergente. Inversement, supposons que (s_m) est convergente. Alors elle est bornée, en particulier bornée supérieurement. $\square$

(b) Si $\alpha \leq 0$, on a

$$n^\alpha a^n \leq a^n \ \forall n \geq 1 \implies \sum_{n=1}^{m} n^\alpha a^n \leq \sum_{n=1}^{m} a^n \leq \frac{a}{1-a} \quad \forall m \geq 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha a^n \text{ converge.}$$

Si $\alpha > 0$, on écrit $n^\alpha a^n = n^\alpha(\sqrt{a})^n(\sqrt{a})^n$, où $n^\alpha(\sqrt{a})^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ car $a \in (0,1)$ (cf. exercice 5 (b), série 3). Donc il existe $M > 0$ tel que $n^\alpha(\sqrt{a})^n \leq M$ pour tout $n \geq 1$. On a alors

$$\sum_{n=1}^{m} n^\alpha a^n \leq \sum_{n=1}^{m} M(\sqrt{a})^n \leq M\frac{\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} \quad \forall m \geq 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha a^n \text{ converge.}$$

5. (a) Grâce à l'inégalité $e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ (qui sera démontrée plus tard) on a $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) < 0$, donc (x_n) est décroissante. Par ailleurs, $y_n := x_n - \frac{1}{n}$ satisfait $y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) > 0$ grâce à l'inégalité $(1+\frac{1}{n})^n < e$. Ainsi, $x_n > y_n > y_1 = 0$ pour tout $n \geq 1$. La suite (x_n) étant décroissante et bornée inférieurement par 0, il existe $\ell \geq 0$ tel que $x_n \to \ell$ lorsque $n \to \infty$.

(b) Notant $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, le point (a) implique, lorsque $n \to \infty$,

$$\begin{aligned}
s_{2n} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\Big) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} - 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Big(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n)\Big) - \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\Big) + \ln(2) \to \ell - \ell + \ln(2) = \ln(2).
\end{aligned}$$

On conclut que $s_n \to \ln(2)$ en remarquant que $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}$ d'où $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \ln(2)$.

6. Notant $x_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$, on obtient que $\Big|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\Big| = \dfrac{1}{2}\Big|\dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}\Big|$, et donc $\lim\limits_{n\to\infty}\Big|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\Big|$ n'existe pas.
En revanche, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n} = \frac{1}{2}$, donc la série est convergente. Cet exemple montre qu'il existe des suites (x_n) telles que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$ existe, alors que $\lim_{n\to\infty} |\frac{x_{n+1}}{x_n}|$ n'existe pas. En revanche, nous savons par l'exercice 4 (a) de la série 4 que si $\lim_{n\to\infty} |\frac{x_{n+1}}{x_n}|$, alors $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$ existe et les limites sont égales. Donc le critère de la racine est strictement plus fort que celui du quotient (d'Alembert).

7. La procédure pour réarranger les termes est la suivante. On remarque que $a_n^+ = |a_n|$ si $a_n > 0$, $a_n^+ = 0$ si $a_n \leq 0$, alors que $a_n^- = -|a_n|$ si $a_n < 0$, $a_n^- = 0$ si $a_n \geq 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k^+ - \sum_{k=0}^{n} a_k^-$ et $\sum_{k=0}^{n} |a_k| = \sum_{k=0}^{n} a_k^+ + \sum_{k=0}^{n} a_k^-$. On se convainc alors que l'hypothèse de convergence conditionnelle implique $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^- = +\infty$.

Supposons s.p.d.g. $\ell > 0$. On somme alors, dans l'ordre, les premiers termes positifs (ou nuls), $a_0^+ + a_1^+ + \ldots$ jusqu'au terme a_p^+ tel que $a_0^+ + \cdots + a_{p-1}^+ \leq \ell$ et $a_0^+ + \cdots + a_p^+ > \ell$. (On est assuré qu'un tel p existe par $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ = +\infty$.) On ajoute ensuite, dans l'ordre, les premiers termes négatifs (ou nuls), $-a_0^- - a_1^- - \ldots$ jusqu'au terme a_q^- qui fait repasser la somme à gauche de ℓ, i.e. tel que $a_0^+ + \cdots + a_p^+ - a_0^- - \cdots - a_{q-1}^- \geq \ell$ et $a_0^+ + \cdots + a_p^+ - a_0^- - \cdots - a_q^- < \ell$. (De nouveau, un tel q existe grâce à $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^- = +\infty$.) On construit ainsi récursivement une permutation σ et une suite de sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$ en zigzag autour de ℓ.

Il reste à se convaincre qu'elle converge vers ℓ. C'est bien le cas car, par exemple, au premier passage à droite de ℓ, on a $|\ell - \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}| \leq a_p^+$, au premier retour à gauche de ℓ, $|\ell - \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}| \leq a_q^-$, etc. Donc à chaque étape du parcours en zigzag, $|\ell - \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}|$ est majoré par le dernier terme ajouté ou soustrait. Or la convergence de $\sum a_n$ assure que $a_n^\pm \to 0$ lorsque $n \to \infty$, donc $|\ell - \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}| \to 0$. $\square$