Corrigé 3

1. Soit $\varepsilon \in (0,1)$. On cherche un $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |x_n - 1| < \varepsilon$. On part de cette inégalité et on travaille par équivalences. Observant que $1-\varepsilon < (1+\frac{1}{n})^k$ est vrai pour tout $n \geq 1$, on a

$$|(1+\tfrac{1}{n})^k - 1| < \varepsilon \iff 1-\varepsilon < (1+\tfrac{1}{n})^k < 1+\varepsilon \iff \tfrac{1}{n} < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{k}} - 1 \iff n > \tfrac{1}{(1+\varepsilon)^{1/k}-1}.$$

Il suffit donc de choisir un entier $N \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1/k}-1}$.

2. (a) Ces limites se calculent en simplifiant la fraction par la plus haute puissance de $n$ :

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a^2n+1}+2}{\sqrt{n+3}+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a^2+n^{-1}}+2n^{-1/2}}{\sqrt{1+3n^{-1}}+4n^{-1/2}} = \sqrt{a^2} = |a|$$
- si $b \neq 0$ on a $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{an^6+n^2+2}-2n^2}{bn^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{a+n^{-4}+2n^{-6}}-2}{b+n^{-2}} = \frac{\sqrt[3]{a}-2}{b}$$

(b) Ces limites se calculent en “amplifiant par le conjugué” :

- $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+an+b} - n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+an+b} - n)\frac{\sqrt{n^2+an+b}+n}{\sqrt{n^2+an+b}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+an+b-n^2}{\sqrt{n^2+an+b}+n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+an+b-n^2}{\sqrt{n^2+an+b}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{an+b}{\sqrt{n^2+an+b}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a+bn^{-1}}{\sqrt{1+an^{-1}+bn^{-2}}+1} = \frac{a}{2}$$
- $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a^2n^2+1} - \sqrt{b^2n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^2n^2+1-(b^2n^2+2)}{\sqrt{a^2n^2+1}+\sqrt{b^2n^2+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a^2-b^2)n^2-1}{\sqrt{a^2n^2+1}+\sqrt{b^2n^2+2}} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a^2-b^2)n-n^{-1}}{\sqrt{a^2+n^{-2}}+\sqrt{b^2+2n^{-2}}} = \begin{cases} -\infty & \text{si } |a|<|b| \\ 0 & \text{si } |a|=|b|\neq 0 \\ 1-\sqrt{2} & \text{si } |a|=|b|=0 \\ +\infty & \text{si } |a|>|b| \end{cases}$$
- $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+an^2+bn+c} - n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+an^2+bn+c-n^3}{(n^3+an^2+bn+c)^{2/3}+(n^3+an^2+bn+c)^{1/3}n+n^2} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a+bn^{-1}+cn^{-2}}{(1+an^{-1}+bn^{-2}+cn^{-3})^{2/3}+(1+an^{-1}+bn^{-2}+cn^{-3})^{1/3}+1} = \frac{a}{3}$$

(c) Utilisant le fait que la fonction sin est $2\pi$-périodique, il vient

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)\right).$$

Or,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{4n^2+n} - 2n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+n}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

*Attention :* A la dernière étape, nous avons utilisé une propriété importante de la fonction sin qui n'a pas encore été abordée au cours, quelle est-elle ?

3. (a) Nous avons

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1 \implies -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

Pour la deuxième suite, nous avons, pour tout $n \geq 2$,

$$n-1 \leq n+\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq n+1 \implies \frac{n+2}{n+1} \leq \frac{n+2}{n+\cos(\frac{n\pi}{2})} \leq \frac{n+2}{n-1} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+\cos(\frac{n\pi}{2})} = 1.$$

(b) On commence par récrire le terme général de la suite :

$$x_n = \frac{(n+1)^n n!}{n^{2n}} = \frac{(n+1)^n}{n^n}\frac{n!}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{n!}{n^n}.$$

On observe alors que

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{n\cdot n\cdot n\ldots n} \leq \frac{1}{n}.$$

Par conséquent,

$$0 \leq \frac{(n+1)^n n!}{n^{2n}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}.$$

Nous avons ainsi encadré $(x_n)$ par les suites $(y_n)$ et $(z_n)$ de termes généraux $y_n \equiv 0$ et $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}$. Puisque

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = e\cdot 0 = 0,$$

il suit du théorème des deux gendarmes que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(c) On cherche $y_n$ et $z_n$ qui tendent vers la même limite et tels que $y_n \leq x_n \leq z_n$. Pour la borne inférieure, on observe que chaque numérateur est $\geq n^2$ et chaque dénominateur est $\leq n^3+5n$. Comme il y a $2n$ termes, on obtient

$$x_n \geq 2n\frac{n^2}{n^3+5n} =: y_n.$$

Inversement, pour la borne supérieure, on majore chaque terme de la somme en utilisant le plus grand des numérateurs et le plus petit des dénominateurs :

$$x_n \leq 2n\frac{n^2+2n-1}{n^3+3n+1} =: z_n.$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 2$, on conclut que $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

4. (a) Soit $M>0$. On cherche $N=N(M)\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq N \Rightarrow x_n \geq M$. Puisque $\sqrt{n}\geq M \Leftrightarrow n \geq M^2$, on voit que n'importe quel $N\geq M^2$ fait l'affaire. Donc on a bien $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = +\infty$.

Soit $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré $k\geq 1$, tel que $a_k > 0$. On a que

$$\sqrt{P(n)} = \sqrt{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0} = \sqrt{n^k}\sqrt{a_k + a_{k-1}n^{-1} + \cdots + a_1 n^{-k+1} + a_0 n^{-k}},$$

où

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_k + a_{k-1}n^{-1} + \cdots + a_1 n^{-k+1} + a_0 n^{-k}} = \sqrt{a_k} > 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^k} = \left(\sqrt{n}\right)^k = +\infty$$

par la première partie de l'exercice. Donc $\lim_{n\to\infty}\sqrt{P(n)} = +\infty$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $N>0$ tel que $\frac{n^p}{a^n} < \varepsilon$ pour tout $n\geq N$. On travaille par équivalences :

$$\frac{n^p}{a^n} < \varepsilon \iff n^p < \varepsilon a^n \iff n < \varepsilon^{1/p}a^{n/p} \iff n < \varepsilon^{1/p}(a^{1/p})^n.$$

On pose alors $b := a^{1/p} > 1$ et on développe le membre de droite en utilisant le binôme de Newton :

$$\frac{n^p}{a^n} < \varepsilon \iff n < \varepsilon^{1/p}\big(1+(b-1)\big)^n = \varepsilon^{1/p}\left(1 + n(b-1) + \frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2 + \ldots\right).$$

On remarque alors que $n \leq \varepsilon^{1/p}\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2 \iff n \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon^{1/p}(b-1)^2}$. Ainsi, puisque tous les termes du développement ci-dessus sont positifs, on obtient que

$$n \geq 1+\frac{2}{\varepsilon^{1/p}(b-1)^2} \Rightarrow n \leq \varepsilon^{1/p}\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2 \Rightarrow n < \varepsilon^{1/p}\left(1+n(b-1)+\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2+\ldots\right) \Rightarrow \frac{n^p}{a^n} < \varepsilon.$$