

Ex. 1 (b) $x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{2}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Pour $x_{n+1} = f(x_n)$, on commence par calculer la (les) limite(s) possible(s).

Si $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, alors passant à la limite $n \rightarrow \infty$ dans

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} = f(x_n) & & \lim f(x_n) \\ \downarrow & \swarrow & = f(\lim x_n) \\ l = f(l) & \text{si } f \text{ continue} & \text{au point } l \end{array}$$

Donc l satisfait l'équation de point fixe de f ,

$$l = f(l).$$

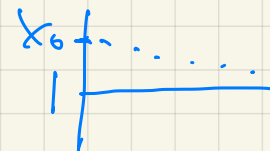
Dans le cas présent, on obtient

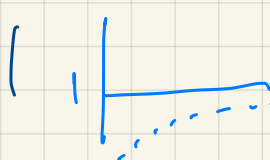
$$x = \frac{x+1}{2}$$

$$2x = x+1 \quad \boxed{x=1}.$$

Donc si (x_n) converge, on aura $x_n \rightarrow 1$.

Deux comportements possibles selon la valeur de x_0 :

(i) $(x_n) \rightarrow$ et bornée inf. par 1 

(ii) $(x_n) \rightarrow$ et bornée sup. par 1 

(i) Supposons $x_0 \geq 1$. Alors on a :

$$x_1 = \frac{x_0 + 1}{2} \quad x_1 - x_0 = \frac{x_0 + 1}{2} - x_0 = \frac{1 - x_0}{2} \leq 0$$

$$\hookrightarrow x_1 \leq x_0$$

Donc initialisation OK : $x_0 \geq 1$, $x_1 \leq x_0$

On va montrer que $x_n \geq 1$, $x_{n+1} \leq x_n$

$$\Rightarrow x_{n+1} \geq 1, \quad x_{n+2} \leq x_{n+1}$$

Ainsi, par récurrence, on aura prouvé

$$\forall n \geq 0, \quad x_n \geq 1 \quad \text{et} \quad x_{n+1} \leq x_n.$$

Si $\underbrace{X_n \geq 1}$ et $X_{n+1} \leq X_n$, alors

• $X_{n+1} = \frac{X_n + 1}{2} \geq \frac{1 + 1}{2} = 1$, donc $\underbrace{X_{n+1} \geq 1}$ ✓

• $X_{n+2} - X_{n+1} = \frac{X_{n+1} + 1}{2} - X_{n+1} = \frac{1 - X_{n+1}}{2} \leq 0$

d'où $X_{n+2} \leq X_{n+1}$.

(ii) Supposons $x_0 \leq 1$. Les mêmes arguments, en changeant le sens des inégalités, nous montrent

que $X_n \leq 1$ et $X_{n+1} \geq X_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

En conclusion,

si $x_0 \leq 1$, alors $(x_n) \nearrow$ et bornée sup. par 1
si $x_0 \geq 1$, alors $(x_n) \searrow$ — " — inf. par 1

Dans les deux cas, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

Ex. 4 $(x_n) \subset (0, \infty)$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, \infty)$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l.$$

t.q. $l - \varepsilon > 0$ ($0 < \varepsilon < l$)

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe

$$N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \left| \frac{x_n}{x_{n-1}} - l \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

Donc, pour $n \geq N$, on a : $l - \varepsilon < \frac{x_n}{x_{n-1}} < l + \varepsilon$

$$\begin{aligned} (l - \varepsilon)^3 x_{n-3} &< (l - \varepsilon) x_{n-2} < (l - \varepsilon) x_{n-1} < x_n < (l + \varepsilon) x_{n-1} < (l + \varepsilon)^2 x_{n-2} < (l + \varepsilon)^3 x_{n-3} \\ &\quad (l - \varepsilon) x_{n-2} < x_{n-1} < (l + \varepsilon) x_{n-2} \\ &\quad (l - \varepsilon) x_{n-3} < x_{n-2} < (l + \varepsilon) x_{n-3} \\ &\quad \vdots \\ (l - \varepsilon) x_N &< x_{N+1} < (l + \varepsilon) x_N \quad (N+1 \geq N) \end{aligned}$$

On voit que, en itérant 3 fois les inégalités,

$$(l - \varepsilon)^3 x_{n-3} < x_n < (l + \varepsilon)^3 x_{n-3}$$

En élevant $n-N$ fois les inégalités, on trouve

$$((-1)^{n-N} X_N)^{n-N} < X_n < ((1)^{n-N} X_N)^{n-N},$$

d'où

$$\sqrt[n]{((-1)^{n-N})^{n-N}} \sqrt[n]{X_N} < \sqrt[n]{X_n} < \sqrt[n]{((1)^{n-N})^{n-N}} X_N$$

$$((-1)^{1-\frac{N}{n}})^{1-\frac{N}{n}} < \sqrt[n]{X_n} < ((1)^{1-\frac{N}{n}})^{1-\frac{N}{n}}$$

$$((-1)^{-\frac{N}{n}})^{-\frac{N}{n}} < \sqrt[n]{X_n} < ((1)^{-\frac{N}{n}})^{-\frac{N}{n}}$$

$$\text{Or, } ((-1)^{-\frac{N}{n}})^{-\frac{N}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{((-1)^N)^N}} \rightarrow 1 \quad \text{si } (-1) \geq 0 \quad \triangle!$$

$$((1)^{-\frac{N}{n}})^{-\frac{N}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{((1)^N)^N}} \rightarrow 1 \quad (1 \geq 0).$$

On obtient donc, en laissant $n \rightarrow \infty$

$$l - \varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq l + \varepsilon$$

d'où

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} - l \right| \leq \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l.$$

⚠ On a supposé $l > 0$ et $l - \varepsilon > 0$.

Si $l = 0$, il suffit d'analyser

$$0 \leq \sqrt[n]{x_n} < (l + \varepsilon)^{-\frac{n}{n}} (l + \varepsilon).$$