

Exo 9 (série 8)

(a) $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$

Par l'exo 6, f sera uniformément continue ssi f est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$. Or,
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc f pas unif. cont.

(b) $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$

Intuition : $\ln(x)$ croît moins vite que x , lorsque $x \rightarrow \infty$
et on sait que $x \mapsto x$ est unif. cont. sur $[1, \infty)$.

On cherche donc à prouver que f est unif. cont.
Soit $\varepsilon > 0$ et $x, y \in [1, \infty)$. On suppose s.p.d.g.
que $x > y$. On alors

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \iff \ln(x) - \ln(y) < \varepsilon$$

$$\iff \ln\left(\frac{x}{y}\right) < \varepsilon \iff \frac{x}{y} < e^\varepsilon \iff x < y e^\varepsilon$$

$$\iff x - y < y(e^\varepsilon - 1).$$

$?$ $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.q. $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

On voit que $\delta(\varepsilon) = e^\varepsilon - 1 > 0$ (car $\varepsilon > 0$)
fonctionne. En effet,

$$|x-y| = x-y < \delta(\varepsilon) = e^\varepsilon - 1 \leq y(e^\varepsilon - 1)$$

$$\Rightarrow |x-y| = x-y < y(e^\varepsilon - 1) \quad \text{car } y \geq 1$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \#$$

On modifie facilement cette preuve pour conclure

que $\ln(x)$ est uniformément continue

sur $[a, \infty)$, pour tout $a > 0$

(utiliser $y \geq a$ au lieu de $y \geq 1$ ci-dessus).

$$(c) \quad f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{x+1}$$

On invoque l'exo 7 : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe,
donc f est uniformément continue.

$$(d) \quad f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3}{x+1}$$

Intuition : $\frac{x^3}{x+1} \sim x^2$, lorsque $x \rightarrow \infty$

On essaie de montrer que f n'est pas unif. cont.
en utilisant les mêmes suites $(x_n), (y_n) \subset [0, \infty)$
que pour $x \mapsto x^2$: $x_n = n \quad y_n = n + \frac{1}{2n}$

$$On a : \bullet |x_n - y_n| = \frac{1}{2n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\bullet |f(x_n) - f(y_n)| = \left| \frac{x_n^3}{x_n+1} - \frac{y_n^3}{y_n+1} \right|$$

$$= \left| \frac{n^3}{n+1} - \frac{\left(n + \frac{1}{2n}\right)^3}{n + \frac{1}{2n} + 1} \right| = \left| \frac{n^3}{n+1} - \frac{\left(n^3 + 3n^2 \frac{1}{2n} + 3n \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{8n^3}\right)}{n + \frac{1}{2n} + 1} \right|$$

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$= \left| \frac{n^3}{n+1} - \frac{n^3 + \frac{3}{2}n + \underbrace{\left(\frac{3}{4} \frac{1}{n}\right)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} \frac{1}{n^3}\right)}_{\rightarrow 0}}{n + \underbrace{\left(\frac{1}{2n}\right)}_{\rightarrow 0} + 1} \right| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left| \frac{n^3}{n+1} - \frac{n^3 + \frac{3}{2}n}{n+1} \right|$$

$\infty - \infty$

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \sim \left| \frac{-\frac{3}{2}n}{n+1} \right| \rightarrow \frac{3}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

Donc f n'est pas uniformément continue.

$$\frac{n^3}{n+1} - \frac{\left(n + \frac{1}{2n}\right)^3}{n + \frac{1}{2n} + 1} = \frac{n^3 \left(n + \frac{1}{2n} + 1\right) - (n+1) \left(n + \frac{1}{2n}\right)^3}{(n+1) \left(n + \frac{1}{2n} + 1\right)}$$

$$= \frac{n^4 + \frac{1}{2} n^2 + n^3 - (n+1) \left(n^3 + 3n^2 \frac{1}{2n} + 3n \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{8n^3}\right)}{(n+1) \left(n + \frac{1}{2n} + 1\right)}$$

$$= \frac{n^4 + n^3 + \frac{1}{2} n^2 - (n+1) \left(n^3 + \frac{3}{2} n + \frac{3}{4} \frac{1}{n} + \frac{1}{8} \frac{1}{n^3}\right)}{(n+1) \left(n + \frac{1}{2n} + 1\right)}$$

$$= \frac{n^4 + n^3 + \frac{1}{2} n^2 - \left(n^4 + n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{3}{2} n + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \frac{1}{n} + \frac{1}{8} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{8} \frac{1}{n^3}\right)}{(n+1) \left(n + \frac{1}{2n} + 1\right)}$$

$$= \frac{-\left(n^2 + \frac{3}{2} n + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \frac{1}{n} + \frac{1}{8} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{8} \frac{1}{n^3}\right)}{(n+1) \left(n + \frac{1}{2n} + 1\right)} \rightarrow -1$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 1.$

(e) $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^x$

On montre que f est prolongeable par continuité sur $[0,1]$, donc (exo 6) uniformément continue.

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^x = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(x)} = e^0 = 1$

$0 \ (x \rightarrow 0^+)$

(en utilisant $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ et $t \mapsto e^t$ continue en $t=0$)