

Exo 2 (Série 7)

Prouver que $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ est prolongeable par continuité en $x = 0$.

On doit montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe.

On a affaire à une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$ (car $\cos(0) = 1$).

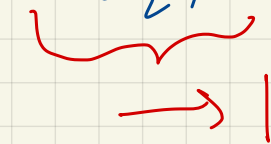
On écrit $1 - \cos x = \cancel{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - \left(\cancel{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$
 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{On a donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}}$$

on cherche à utiliser $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2 = \frac{1}{2}$$



[continuité de $t \mapsto t^2$ en $t=1$ justifie]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$ et le prolongement

$\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est donné par

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Remarque : Le résultat de la limite ci-dessus

peut se ré-écrire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$

f est équivalent à g

Notation : On écrit $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \rightarrow a$
($a \in \overline{\mathbb{R}}$)

si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On a donc les résultats :

- $\sin x \sim x \quad (x \rightarrow 0)$
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad (x \rightarrow 0)$

On dit que $\sin x$ et x sont des
"infinitésimement petits équivalents"

Exo 3 (Série 7) Déterminer si la fonction donnée est prolongeable par continuité.

$$(a) \quad f(x) = \frac{|x|(x+1) + x}{x^2(x+1)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$$

- prolongement en $x=0$?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)(x+1) + x}{x^2(x+1)} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 - x + x}{x^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x^2(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x+1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1) + x}{x^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x}{x^2(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x(x+1)} = +\infty \quad \left(\frac{2}{0^+} \right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, on ne peut pas prolonger f par continuité en $x = 0$.

- prolongement en $x = -1$?

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\overbrace{|x|(x+1) + x}^{-1}}{\underbrace{x^2(x+1)}_{\rightarrow 0^-}} = +\infty \quad \left(\frac{-1}{0^-} \right)$$

$$x+1 < 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty \quad \left(\frac{-1}{0^+} \right)$$

donc f n'est pas prolongeable par
continuité en $x = -1$.

$$(b) \quad f(x) = \frac{x \sqrt{\cos^2 x - 4 \cos x + 3}}{|x| \sin x} \quad \forall x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{\cos^2 x - 4 \cos x + 3}}{|x| \sin x}$$

forme indéterminée
type $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{(\cos x - 1)(\cos x - 3)}}{|x| \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} \sqrt{\left(-\frac{x^2}{2}\right)(\cos x - 3)}}{|x| \cancel{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{2}} \sqrt{3 - \cos x}}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{|x|}{\sqrt{2}} \sqrt{2}}{|x|} = 1$$

infiniment petits équivalents

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\sin x \sim x$$

Donc f est prolongeable avec $\hat{f} : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} \right]$$

si les limites $\frac{g(x)}{x}$ et $\frac{g(x)}{\sin x}$ existent



On ne peut utiliser des infinitésimement petits équivalent que dans un produit, comme ci-dessus. Les développements limités nous fournissent une technique de calcul plus simple.