

Exo 1 (série)

(c) $\sum_{n \geq 1} a \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

(a > 0)

terme général

$$a_n = a \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

On sait que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

donc $a_n \not\rightarrow 0$ si $a \geq 1$.

Donc la série diverge si $a \geq 1$.

Pour quelles valeurs de $a \in (0, 1)$ converge-t-elle?

? A quelle vitesse $a \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow 0$?

? A quelle vitesse $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow \infty$?

Série 5 : on a prouvé que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$
pour un certain $l > 0$.

Donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$ "à la même vitesse" que $\ln(n)$

Ceci suggère de comparer $\sum_{n \geq 1} a_n$ avec $\sum_{n \geq 1} b_n$

pour $b_n = a^{\ln(n)}$. On applique c.c. 3 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}}{a^{\ln(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)} = a^l$$

Comme $a^l > 0$, on a que $\sum a_n$ et $\sum b_n$

ont même nature. Or,

$$b_n = a^{\ln(n)} = n^{\ln(a)} = \frac{1}{n^{-\ln(a)}} = \frac{1}{n^{\ln(\frac{1}{a})}} \quad)$$

↑
propriétés de $\ln$

donc $\sum b_n$ converge ssi $(b_n = \frac{1}{n^a})$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) > 1 \quad \frac{1}{a} > e \quad a < \frac{1}{e}.$$

Conclusion : $\sum_{n \geq 1} a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$ converge ssi $a < \frac{1}{e}$.

$$(d) \sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Terme général $a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right) \not\rightarrow 0$ si $\alpha \leq 0$.

Donc la série diverge $\forall \alpha \leq 0$.

Pour $\alpha > 0$, on compare a_n avec $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$

(idée: $\ln(1+x) \sim x$ lorsque $x \rightarrow 0$)

on a $\frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$

donc pour $\alpha > 0$ $\ln \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right) \sim \frac{1}{n^\alpha} \quad (n \rightarrow \infty)$

On applique c.c. 3 :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{n^\alpha}}_{\rightarrow e} = \ln(e) = 1\end{aligned}$$

Donc les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont la même nature.

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge ssi $\alpha > 1$.

Exo 2 (serie G)

$$(a) \sum_{n \geq 1} \frac{a^n n!}{n^n} \quad (a \in \mathbb{R}) \quad X_n = \frac{a^n n!}{n^n}$$

Critère du quotient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{X_{n+1}}{X_n} \right| &= \left| \frac{a^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{a^n n!} \right| = |a| \cancel{(n+1)} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \cancel{\frac{1}{n+1}} \\ &= |a| \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \frac{|a|}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|a|}{e} \end{aligned}$$

donc $\sum |X_n|$ converge si $|a| < e$

$\sum x_n$ diverge si $|a| > e$.

Si $|a| = e$, le critère du quotient ne permet pas de conclure ; il faut étudier ces cas séparément.

Pour $|a| = e$, on a $\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$

Or, on sait que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ et

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \quad \forall n \geq 1$. Donc

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |x_{n+1}| \geq |x_n| \quad \forall n \geq 1.$$

En particulier, $|x_{n+1}| \geq |x_1| = |a| > 0 \quad \forall n \geq 1$

(la suite $(|x_n|)_{n \geq 1}$ est croissante)

$\Rightarrow |x_n|$ est borné loin de zéro

donc $|x_n| \not\rightarrow 0$, donc $x_n \not\rightarrow 0$

et la série diverge.

Conclusion : $\sum_{n \geq 1} \frac{a^n n!}{n^n}$ converge ssi $|a| < e$.

(d) $\sum_{n \geq 2} \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$ terme général $x_n = \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$

Critère de la racine :

$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{n^{\ln(n)/n}}{\ln(n)}$$

Que signifie n^α pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ (pas forcément rationnel)?

$$n^3 = n \cdot n \cdot n$$

$$n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \quad (\text{définition de la racine carrée})$$

$$n^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{n} \quad (\text{analogue, sols. de } x^3 = n)$$

$$n^{\frac{2}{3}} = (n^2)^{\frac{1}{3}}$$

$\hookrightarrow$ on sait définir les puissances rationnelles.

Par définition, $n^\alpha := e^{\alpha \ln(n)}$

(cohérent avec les propriétés de $\ln/\exp$:

$$e^{\alpha \ln(n)} = e^{\ln(n^\alpha)} = n^\alpha \quad \checkmark)$$

On utilise ceci avec $\alpha = \frac{\ln(n)}{n}$:

$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{n^{\frac{\ln(n)}{n}}}{\ln(n)} = \frac{e^{\frac{\ln(n)}{n} \cdot \ln(n)}}{\ln(n)} = \frac{e^{\frac{(\ln(n))^2}{n}}}{\ln(n)}$$

Maintenant, je prétends que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln(n))^2}{n} = 0$,

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{e^0}{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n)} = 0$

($\triangle$!) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{(\ln(n))^2}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln(n))^2}{n}} = e^0$)

continuité de $x \mapsto e^x$ au point $x = 0$

Conclusion : $\sum_{n \geq 2} \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$ converge.

Preuve que $\frac{\ln(n)^2}{n} \rightarrow 0$:

$$\frac{\ln(n)^2}{n} = \left(\frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \quad \text{On montre que } \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$$

et on conclut par la continuité de

$$x \mapsto x^2 \text{ en } x = 0 :$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \right)^2}_{\downarrow 0} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \right)^2 = 0$$

On a déjà vu que $\frac{\ln(n)}{n^p} \rightarrow 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$

Le résultat rest vrai pour $p > 0$ (non-entier)

Pour $p = \frac{1}{2}$: idée : comparer $\ln(n)$ avec une puissance de $n < \frac{1}{2}$

on remarque que $\hookrightarrow \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} < \frac{n^\alpha}{n^{\frac{1}{2}}}$ avec $\alpha < \frac{1}{2}$

$$\ln(n) = \frac{1}{\alpha} \ln(n^\alpha) \quad \forall \alpha > 0$$

On choisit $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha \ln(n^\alpha)}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{array}{c} \ln \nearrow \\ \ln(n^\alpha) \leq \ln(n^{\alpha+1}) \\ \leq n^\alpha \end{array}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha \ln(n^\alpha)}{n^{\frac{1}{2}}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha n^\alpha}{n^{\frac{1}{2}}} = 0 \quad \text{car } \alpha < \frac{1}{2} \quad (\ln(1+x) \leq x \quad \forall x > 0)$$

$$2 \text{ termes} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha \ln(n^\alpha)}{n^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Généralisation : le même argument permet de
montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln(n))^p}{n} = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}.$