Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 9.1 – mardi 12 novembre 2024

Exercice 1. *Objectif: revenir posément sur un exemple du cours.*

On considère la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Pour quel(s) $m \in \mathbb{N}$ a-t-on $f \in C^m([-1,1])$?

Exercice 2. *Objectif: appliquer des résultats du cours.*

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $(n,k,l) \in \mathbb{N}^3$ tel que $0 \leq l \leq k$ et $l \leq n$ et $f : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivable sur I. On suppose que f admet au moins k zéros dans I (c'est à dire au moins k solutions distinctes de $f(x) = 0$ dans I). Montrer que $f^{(l)}$ admet au moins $(k-l)$ zéros dans I.

Exercice 3. *Objectif: construire un raisonnement avec des résultats du cours.*

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a,b[$ telle que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty.$$

Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{R}$ il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = p$.
Indication: on pourra commencer par le cas $p = 0$ puis le généraliser à l'aide d'une transformation bien choisie.

Exercice 4. *Objectif: montrer une condition nécessaire et suffisante (CNS) de stricte monotonie.*

Soient I un intervalle ouvert non vide et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que:

$$f \text{ est strictement croissante sur } I$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f'(x) \geq 0 \\ \text{Si } J \text{ est un intervalle et } J \subset \{x \in I \ ;\ f'(x) = 0\} \text{ alors } J \text{ est un singleton} \end{cases}$$

Exercice 5.(*) *Objectif: construire un raisonnement avec des résultats du cours.*

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell > 0.$$

1. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.