Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 8.1 – mardi 5 novembre 2024

Exercice 1. *Objectif: savoir étudier la convergence simple et uniforme sur des cas concrets.*

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \frac{n}{1+n(1+x)}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Est-ce que la convergence est uniforme sur $[0, +\infty[$? Justifier.

Exercice 2. *Une propriété très utile de la convergence uniforme.*

1. Soit (f_n) une suite de fonctions sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, qui converge uniformément vers $f \in \mathcal{C}^0(I)$, et (x_n) une suite de réels dans I qui converge vers $x \in I$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.
2. Donner un contre-exemple à cette propriété dans le cas où (f_n) est une suite de fonctions dans $\mathcal{C}^0(I)$ qui converge simplement vers $f \in \mathcal{C}^0(I)$ mais pas uniformément.

Exercice 3. *Objectif: manipuler les outils liés à la convergence uniforme.*

Pour chaque entier $n \geq 0$, on considère la fonction polynomiale $P_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$P_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n(x)^2\right).$$

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ et tout entier $n \geq 0$:
$$0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}.$$
2. En déduire que la suite $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément vers la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$.
3. Montrer qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $Q_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers la fonction $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = |x|$.

Indication: Commencer par montrer par récurrence que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$, $\forall x \in [0, 1]$.

Exercice 4. *Objectif: se familiariser avec les notations de Landau.*

1. Soient $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions. Montrer que si, au voisinage de $+\infty$, on a $f = O(g)$ et $g = O(h)$, alors $f = O(h)$.
2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que $u_n = o(v_n)$. Montrer qu'il existe une suite (w_n) dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$ *(NB: pour les suites, les notations $o(\cdot)$ et $O(\cdot)$ font toujours référence au cas où n est au voisinage de $+\infty$).*

Exercice 5.(*) *Objectif: montrer le deuxième Thm. de Dini (bien différent de celui du cours!).*

Soit (f_n) une suite de fonctions réelles (pas nécessairement continues) définies sur un segment $[a, b]$ qui converge simplement vers $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est croissante, alors la convergence est uniforme.
Indication: Pour $\epsilon > 0$, montrer que $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\sup |f_n - f| \leq \epsilon$ en utilisant la continuité uniforme de f.