Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 6.2 – jeudi 17 octobre 2024

Exercice 1. *Objectif: mobiliser plusieurs outils pour étudier une limite, procéder méthodiquement pour traiter tous les cas.*

Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la limite

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^4+\alpha x^3-8\alpha x}{\sin(\alpha^4-x^4)}$$

existe-t-elle? Calculer cette limite lorsqu'elle existe . *(Rappel: on connaît* $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$*...)*

Exercice 2. *Objectif: s'entraîner au calcul de limites.*

Calculer les limites suivantes:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3+2x-1}{3x^2-2}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2}{x-1}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

(vi) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

Exercice 3. *Objectif: devenir maître des ϵ et δ.*

Parmi les énoncés suivants, lesquels sont équivalents à "f est continue en x" ? Quand c'est le cas, donner une preuve soigneuse. Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.

(i) $\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall y: |x-y|<\epsilon \implies |f(x)-f(y)|<\delta.$

(ii) $\forall\delta>0\,\exists\epsilon>0\,\forall y: |x-y|<\epsilon \implies |f(x)-f(y)|<\delta.$

(iii) $\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall y: |x-y|\le\delta \implies |f(x)-f(y)|<\epsilon.$

(iv) $\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall y: |x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|\le\epsilon.$

(v) $\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall y: |x-y|<\epsilon \impliedby |f(x)-f(y)|<\delta.$

(vi) $\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall y: |x-y|<\delta \impliedby |f(x)-f(y)|<\epsilon.$

Exercice 4. *Objectif: démontrer un résultat du cours (s'inspirer de la preuve d'un résultat similaire vu en cours).*

Soit $f: D\to\mathbb{R}$ une fonction croissante définie au voisinage de $x_0\in\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ et $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ existent et que $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \le \lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

Exercice 5 (*). *Étude d'une fonction vraiment étrange: la fonction de Thomae.*

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel ou } x=0,\\ \frac{1}{q} & \text{si } x=\frac{p}{q}, \text{ avec } p\in\mathbb{Z}^*, q\ge 1 \text{ et } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux.}\end{cases}$$

En quels points f est-elle continue? (on pourra, si besoin, utiliser l'exercice 6 de la série 4.2).