Analyse avancée 1
Mathématiques 1ère année
Prof. Lénaïc Chizat

# Série 6.1 – mardi 15 octobre 2024

**Exercice 1.** *Objectif: manipuler les propriétés de fonctions.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective et impaire. Montrer que sa fonction réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est aussi impaire.

**Exercice 2.** *Objectif: calculer une limite importante (à connaitre).*

Montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ à partir des inégalités $\sin(x) < x < \tan(x)$, $\forall x \in ]0, \pi/2[$. On pourra admettre $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$ et utiliser le Thm. des gendarmes (qui sera vu en cours lundi).

**Exercice 3.** *Objectif: s'entraîner aux calculs de limite.*

Calculer $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ dans les cas où $f : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ sont définis par:

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$, $\quad f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$, $\quad x_0 = 1$;

b) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, $\quad x_0 = 0$;

c) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, $\quad x_0 = 1$.

**Exercice 4 (*).** *Objectif: étudier les limites d'une fonction étrange.*

Soit $A \subset \mathbb{R}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par:

$$A = \left\{ \frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \right\},$$

et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } x \in A, \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \notin (\mathbb{Q} \cup A). \end{cases}$$

1. Montrer que $f$ admet une limite en tous les points de $A$ et calculer la valeur de cette limite.
2. Est-ce que $f$ admet une limite en $x_0 = 0$ ? Si oui, calculer cette limite; sinon, justifier votre réponse.
3. Trouver les points de $\mathbb{R}$ où $f$ n'a pas de limite.

**Exercice 5 (*).** *Objectif: prendre le temps de bien assimiler les données d'un problème.*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles finis disjoints inclus dans $]0, 1[$, c'est à dire que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on a $A_n \subset ]0, 1[$, $A_n$ contient un nombre fini d'éléments et $A_m \cap A_n = \emptyset$ si $m \neq n$. On définit la fonction $f : ]0, 1[ \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x \in A_n, \\ 0 & \text{si } x \notin A_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $a \in ]0, 1[$, on a $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

*On a donc une fonction non-nulle en une infinité de points mais sa limite en tout point vaut 0!*