Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 5.2 – jeudi 10 octobre 2024

Exercice 1. (À rendre)

Étudier la convergence de
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)!}+\frac{(-1)^n}{n^2+n+1}\right).$$

Exercice 2. *Objectif: s'entraîner à l'étude de convergence de séries.*

Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres réels strictement positifs pour lesquelles il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n\geq n_0$: $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{b_n}$. Montrer que:
$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n<+\infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n<+\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n=+\infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n=+\infty.$$
Indication: montrer que pour tout $n>n_0$, $a_n\leq\beta b_n$ où $\beta=\frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}$.

Exercice 3. *Objectif: étude de séries dépendant d'un paramètre.*

Étudier, en fonction de la valeur de $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, la convergence de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{n!\alpha^n}{n^n}$ (on pourra si besoin utiliser le fait que $\Big((1+1/n)^n\Big)_{n\geq 1}$ est croissante et converge vers e, cf. série 3.2, ex. 3).

Exercice 4. *Objectif: un petit échauffement en douceur sur les fonctions réelles...*

1. Soient $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions décroissantes. Montrer que $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est croissante.
2. Donner l'expression et le graphe de $g\circ f$ et $f\circ g$ pour les fonctions $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par
$$f(x)=\begin{cases}x+3 & \text{si } x\geq 0\\ x^2 & \text{si } x<0\end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x\geq 3\\ x & \text{si } x<3.\end{cases}$$

Exercice 5.(*) *Objectif: prendre des initiative pour "contrôler" (c'est à dire borner) une somme.*

Soit (a_n) une suite décroissante de nombres réels telle que l'ensemble $E=\left\{n\in\mathbb{N}: a_n\geq\frac{1}{n}\right\}$ possède une infinité d'éléments. Montrer que la série
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$
diverge. Que devient ce résultat si la suite (a_n) n'est pas supposée décroissante ?

Exercice 6.(*) *Objectif: ne pas se faire intimider par la formulation atypique d'un problème .*

On note A l'ensemble des entiers naturels non-nuls dont l'écriture (en base 10) ne comporte pas de 9. On énumère A en la suite croissante (k_n). Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{k_n}$?

Indication: poser $A_N=A\cap\{10^N,10^N+1,\ldots,10^{N+1}-1\}$ et majorer le cardinal de A_N.