Analyse avancée 1
Mathématiques 1ère année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 4.2 – jeudi 3 octobre 2024

Exercice 1 (à rendre aux assistants).

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par $x_0 = 0$, $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n > 0$ est de Cauchy (sans passer par le fait qu'elle converge).
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par $x_n = (-1)^n$, $n \geq 0$ n'est pas de Cauchy.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée récursivement par $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{x_n+2}$, $n \geq 0$, $x_0 = 1$ est de Cauchy et calculer sa limite.
4. On considère la suite donnée par $8, 8.8, 8.88, 8.888, 8.8888, \ldots$. Est-ce que cette suite converge et, si oui, quelle est sa limite ? Justifier votre réponse.

Exercice 2. *Objectif: comprendre la notion de suite de Cauchy.*

Soit (a_n) une suite telle que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\lim_n (a_{n+p} - a_n) = 0$. Est-ce que nécessairement (a_n) converge?

Exercice 3.(*) *Objectif: comprendre une définition alambiquée, et étudier les points d'accumulations.*

On considère la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée, pour $p, q \in \mathbb{N}^*$ avec $1 \leq p \leq q$, par

$$x_0 = 0, \quad x_{\frac{q(q-1)}{2}+p} = \frac{p}{q}.$$

1. Écrire les 15 premiers termes de cette suite et justifier que cette suite est bien définie.
2. Décrire l'ensemble des points d'accumulation de cette suite (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 6 si besoin).

Exercice 4.(*) *Objectif: explorer des pistes, prendre des initiatives.*

Soient $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que les trois suites $(a_n), (b_n), (c_n)$, définies comme

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad b_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2} \quad c_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2}$$

convergent et calculer leurs limites.
Indication: Étudier *ensemble* les suites $|a_n - b_n|, |b_n - c_n|, |c_n - a_n|$.

Exercice 5.(*) *Objectif: raisonner par l'absurde et avec des sous-suites.*

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers naturels telle que $\forall n \geq 1$, $a_{a_n} = n^4$. Est-ce que nécessairement $\lim_n a_n = +\infty$?

Exercice 6.(**) *Objectif: raisonner par l'absurde et avec des sous-suites.*

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et soient $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ des suites telles $\forall n \in \mathbb{N}$, $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et telles que $(\frac{p_n}{q_n})$ converge vers x. Démontrer $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, puis que $|p_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.