Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 2.2 – jeudi 19 septembre 2024

Exercice 1. *Objectif: manipulation de la valeur absolue et de "ϵ".*

1. Démontrer l'inégalité triangulaire inverse à partir de l'inégalité triangulaire.
2. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ |x| < \epsilon) \Leftrightarrow x = 0$. *(C'est une caractérisation utile de* 0.*)*

Exercice 2. *Objectif: apprendre à construire des exemples.*

Donner un (ou des) exemple de suite réelle:

1. bornée et strictement croissante
2. non majorée et non minorée
3. qui converge et n'est pas "monotone à partir d'un certain rang" (on dit qu'une propriété P d'une suite est satisfaite *à partir d'un certain rang* ssi il existe N tel que $P((x_n)_{n\geq N})$ est vraie).

Exercice 3. *Objectif: Familiarisation avec la notion de convergence.*

Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = \frac{\sqrt{n^2+2}}{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que
$$\left| x_n - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$
Indication: utiliser, après l'avoir démontrée, la relation $\sqrt{1+\delta} < 1 + \frac{\delta}{2}$, $\forall \delta \in \mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire, en utilisant la définition de la limite, que
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4. *Objectif: mettre en œuvre des techniques pour prouver la monotonie.*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$ et $(u_n/v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Montrer que $\left(\frac{u_0+\cdots+u_n}{v_0+\cdots+v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 5(*). *Objectif: apprendre à faire des tentatives et persévérer pour résoudre un problème plus difficile.*

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, montrer que parmi les nombres $a, 2a, \dots, (n-1)a$, au moins un diffère d'un entier d'au plus $\frac{1}{n}$. (Autrement dit, si l'on définit $E = \{ka\ ;\ k \in \{1, \dots, n-1\}\}$ il faut montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\min\{|x-m|\ ;\ m \in \mathbb{N}\} \leq \frac{1}{n}$.)