Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 2.1 – mardi 17 septembre 2024

Exercice 1. *Objectif: élargir son catalogue d'astuces de calcul.*

Calculer :

1. $\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 8} + \cdots + \frac{1}{2022\cdot 2024}$.
2. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{2023\cdot 2025}$.

Indication: on pourra chercher à faire apparaître une somme téléscopique.

Exercice 2. *Objectif: manipuler les propriétés des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.*

1. Soient $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$, B majoré. Montrer que $\sup A \leq \sup B$.
2. Pour une suite d'ensembles, $A_1, A_2, \ldots$ on note $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \,;\, \forall i \in \mathbb{N}^*, x \in A_i\}$ (ou juste $\cap A_i$) leur intersection et $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \,;\, \exists i \in \mathbb{N}^*, x \in A_i\}$ leur union. Trouver une suite d'intervalles ouverts $A_1, A_2, \ldots$ telle que :
   (a) $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ est un intervalle ouvert,
   (b) $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ est un intervalle fermé.
3. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ une suite d'ensembles bornés.
   (a) Est-ce que $\cap A_n$ est borné ?
   (b) Est-ce que $\cup A_n$ est borné ?

   Donner la preuve ou un contre-exemple.
4. Montrer qu'un ensemble fini A est borné et donner $\sup A$ et $\inf A$.

Exercice 3. *Objectif: maîtriser la notion de partie entière, manipulation de sommes.*

1. Déterminer $\inf\{\lfloor x \rfloor + \lfloor x^{-1} \rfloor \,;\, x \in \mathbb{R}_+^*\}$ (rappel: $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x).
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$. On pourra utiliser, après l'avoir démontré par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Indication: essayer de trouver un motif dans les premiers termes de la somme.

Exercice 4. *Objectif: prouver des résultats de densité.*

On note $E = \{q^2 \,;\, q \in \mathbb{Q}\}$ et $D = E \cup (-E)$. Montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. *Objectif: montrer l'irrationalité.*

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tels que $x \notin \mathbb{Q}$ et $ad - bc \neq 0$. Montrer que $\frac{ax+b}{cx+d} \notin \mathbb{Q}$.