Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 14.1 – mardi 17 décembre 2024

Exercice 1. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soient $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\int_0^\infty f(x)^2 \mathrm{d}x < +\infty$ et $\int_0^\infty g(x)^2 \mathrm{d}x < +\infty$. Montrer que $\int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{d}x$ converge absolument et que l'on a

$$\left| \int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{d}x \right| \leq \left(\int_0^\infty f(x)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^\infty g(x)^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Indication : on pourra, lorsqu'elle est bien définie, étudier la quantité $\int_0^x \left(\frac{f(t)}{(\int_0^x f(s)^2 \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}} - \frac{g(t)}{(\int_0^x g(s)^2 \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 2. *Extension des notions de factorielle et de coeffs. binômiaux aux réels positifs.*

1. Étudier, pour $x > 1$ la nature de l'intégrale généralisée
$$\Gamma(x) = \lim_{N \to \infty} \int_0^N t^{x-1} e^{-t} \, dt.$$
Indication : utiliser le fait que $t^{x-1}e^{-t} \leq e^{-t/2}$ *pour* t *assez grand.*
2. Calculer $\Gamma(1)$ puis montrer que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\forall \alpha > 1$. En déduire
$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Indication : intégrer par parties.
3. Montrer que :
$$\log \Gamma \left(\frac{x + y}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\log \Gamma(x) + \log \Gamma(y) \right).$$
Indication : utiliser Cauchy-Schwarz.
4. Soit
$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1} \, dt, \quad \text{pour } x, y > 1.$$
Montrer que :
$$B(x + 1, y) = \frac{x}{x + y} B(x, y), \quad \text{ainsi que } B(x, y + 1) = \frac{y}{x + y} B(x, y).$$
Indication : intégrer par parties.
5. En déduire que :
$$B(n, m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n + m)}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$
Indication : par récurrence.

Exercice 3 (**). *Limite d'une série alternée (Oral ENS Ulm 2024)*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ décroissante et tendant vers 0 en $+\infty$. Montrer que la fonction

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(nx)$$

est bien définie pour $x > 0$. Donner sa limite en 0. *(Deviner la limite = (*), la démontrer = (**).)*