Analyse avancée 1
Mathématiques 1ère année
Prof. Lénaïc Chizat

# Série 13.1 – mardi 10 décembre 2024

**Exercice 1.** *Échauffement 1: une simple remarque qui permet parfois d'éviter de longs calculs...*

Soit $a > 0$. Montrer que si $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ est impaire et continue, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$. Comment prouver cette propriété si $f$ est seulement supposée intégrable? *(Cette propriété est intuitive, mais prenez le temps de la montrer soigneusement à partir des outils du cours.)*

**Exercice 2.** *Calcul d'aire par le biais d'intégrales.*

1. Trouver l'aire du domaine $\{(x, y)\ ;\ 0 < x < 1,\ x^2 < y < x\}$.
2. Prouver que l'aire d'un disque de rayon $r > 0$ est égale à $\pi r^2$.
   *(Indication: l'identité* $\cos(u)^2 = (\cos(2u) + 1)/2$, $\forall u \in \mathbb{R}$ *pourra être utile.*

**Exercice 3.** *Intégrale de fonctions continues par morceaux.*

Considérez la fonction $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \geq 1$ et $f(x) = 0$ si $x < 1$. Montrez à l'aide de résultats du cours que $f$ est intégrable sur $[0, 2]$. Calculez $F(x) = \int_0^x f$. Est-ce que $f$ admet une primitive?

**Exercice 4.** *Calcul de limites de suites comme approximations d'intégrales*

Déterminer la limite des suites $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ données pour $n \in \mathbb{N}^*$ par:

1. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$
2. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$

**Exercice 5.** *Entraînement au calcul d'intégrales.*

Calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_0^1 e^{-2x} \cos(2\pi x)\mathrm{d}x$
2. $\int_0^{\pi/3} \cos(x)^5 \sin(x)\mathrm{d}x$
3. $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos(x)^2}\mathrm{d}x$
4. $\int_0^b x \sin(x^2)\mathrm{d}x$ pour $b > 0$

**Exercice 6.** *Entraînement au calcul de primitives.*

Trouver une primitive de la fonction $x \mapsto x \log \sqrt{x}$ (avec $x > 0$).

**Exercice 7.** **(*)** *Divergence logarithmique de la série harmonique.*

Montrer que la suite $(x_n)$ définie par $x_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \log(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ converge.

*Indication:* on pourra chercher à exprimer le terme $x_n$ sous la forme d'une intégrale.
*Remarque :* Cette limite est appelée constante de *Euler-Mascheroni.* Remarquez que ce résultat nous donne une estimation assez bonne de la vitesse à laquelle la série harmonique diverge.