Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 12.1 – mardi 3 décembre 2024

Exercice 1. *Calculer une intégrale "à la main".*

Calculer, en utilisant la méthode des sommes de Darboux, l'intégrale :

$$\int_0^b x^2\,dx.$$

Indication : Que vaut $\sum_{i=1}^n i^2$?

Exercice 2. *Quelles sont les fonctions positives d'intégrale nulle?*

1. Soit $g \geq 0$ une fonction continue sur $[a,b]$ avec $\int_a^b g = 0$. Montrer que $g = 0$.
2. Qu'en est-il si g est seulement supposée intégrable ?

Exercice 3. *Démonstration de la linéarité de l'intégrale.*

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Démontrer en utilisant les sommes de Darboux que :

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

(*en supposant la continuité, on aurait une preuve courte avec l'utilisation du théorème fondamental de l'analyse.*)

Exercice 4. *Une généralisation du théorème de la valeur moyenne.*

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec g positive. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f \cdot g = f(c) \int_a^b g.$$

Vérifier que le Théorème de la valeur moyenne est un cas particulier de cet énoncé.

Exercice 5. (*) *Intégrabilité d'une fonction discontinue en tout rationel.*

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b}, & \text{si } x \text{ s'écrit comme fraction réduite } x = \frac{a}{b}, \text{ avec } a, b \in \mathbb{N},\ b \geq 1, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est intégrable au sens de Riemann (qui est la définition vue en cours).