Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 10.1 – mardi 19 novembre 2024

Préambule. On admet l'existence de la fonction exponentielle exp et de sa réciproque logarithme népérien log (en base e) avec leurs propriétés usuelles et leurs dérivées (que nous introduirons proprement bientôt). Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction puissance α est définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ par $x^\alpha = e^{\alpha \log(x)}$.

Exercice 1.

Calculer, à l'aide de la formule de Taylor-Young, les DL suivants (à utiliser dans les exercices suivants):

1. $\mathrm{DL}_6(0)$ de cos
2. $\mathrm{DL}_3(1)$ de cos
3. $\mathrm{DL}_2(1)$ de log (ou, de manière équivalente, $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \log(1+x)$)

Exercice 2.

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^6)}{x^{12}}$,
2. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 3.

Calculer les limites suivantes:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^m}{(1-\cos x)^n}$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \le m, n \le 2$.
2. $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x$, avec $\alpha > 0$.
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}$, avec $\alpha > 0$.

Exercice 4.

Donner le développement limité à l'ordre m autour de 0 des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \cos(x^2)$ et $m = 4$,
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(\cos(x))$ et $m = 6$,
3. $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \log(\cos(x))$ et $m = 4$.
4. $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x}$ et $m = 2$
5. $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ et $m = 4$ (*Indication:* utiliser le développement de $x \mapsto 1/(1-x)$ trouvé ci-dessus. On se ramènera systématiquement à ce DL pour trouver le DL d'un ratio).

Exercice 5.

Supposons qu'on ait une quantité $x > 0$ d'une certaine ressource que l'on veut partager en n parties $x_1, \ldots, x_n$ avec $x_i \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n$ et $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq x$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et strictement concave. On veut maximiser $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$. Montrer que la seule solution optimale est le choix $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{x}{n}$.

Indication: montrer que si il existe une paire d'indices (i, j) tels que $x_i \neq x_j$, alors on peut trouver une meilleure solution en remplaçant x_i et x_j par $x'_i = x'_j = \frac{x_i + x_j}{2}$.

Remarque: On admet l'existence d'une solution optimale $(x_1, \ldots, x_n)$. Cela peut se démontrer à l'aide d'une version multidimensionnelle du théorème du cours qui garantit l'existence d'un minimum pour les fonctions continues sur un intervalle.

Épilogue: Interprétation économique. On peut interpréter f comme une *fonction d'utilité* qui quantifie la satisfaction qu'un individu tire de la possession d'une certaine ressource (par ex. argent, énergie, nourriture, etc), et l'on cherche à maximiser la satisfaction totale de n individus qui se partagent cette ressource. L'hypothèse de stricte croissance pour f est alors naturelle et la stricte concavité est la traduction mathématique d'un modèle où le gain de satisfaction marginal pour chaque individu – c'est à dire f' (si f dérivable) – est décroissant.

Cet exercice illustre un principe important en économie : lorsqu'on cherche à maximiser la satisfaction totale dans un système où les ressources sont limitées et que la satisfaction marginale est décroissante, une répartition équitable est la solution optimale. Mais il ne faut pas sur-interpréter l'importance pratique de ce genre de résultats car la validité des conclusions repose uniquement sur la validité des hypothèses. Les mathématiques, dans ce contexte, ont pour unique intérêt d'exhiber les conséquences logiques que l'on peut tirer d'un modèle donné, mais elles ne disent jamais rien de la validité d'un modèle.