Remarques : * $f(x) = \underset{x_0}{o}(1) \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

* La notation $f \in O(g)$ ou $o(g)$ serait plus correcte ; mais moins commode. (ensembles de fonctions.)

→ En particulier $f_1 = O(g)$ et $f_2 = O(g)$ $\not\Rightarrow$ $f_1 = f_2$.

ce ne sont pas des égalités au sens mathématique.

fin 30/10

* Aussi utilisée pour les suites (avec $n \to +\infty$ implicitement) :

$$\frac{n^2+3}{4n} = O(n) \quad , \quad 3 + \frac{2}{n} = o(\log(n))$$

4.1 Dérivées

Def : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $x_0 \in D$. On dit que f est dérivable en x_0 ssi $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existe et est finie. Cette limite est alors notée $f'(x_0)$ et appelée la dérivée de f en x_0.

Prop : Soit f définie au voisinage de x_0 et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f \text{ dérivable en } x_0 \\ \text{et } f'(x_0) = \alpha \end{pmatrix}}_{(A)} \iff \left(\underbrace{f(x) = \overbrace{f(x_0) + \alpha \cdot (x - x_0)}^{\text{approx. affine}} + \overbrace{\underset{x_0}{o}(x - x_0)}^{\text{erreur}}}_{(B)} \right)$$

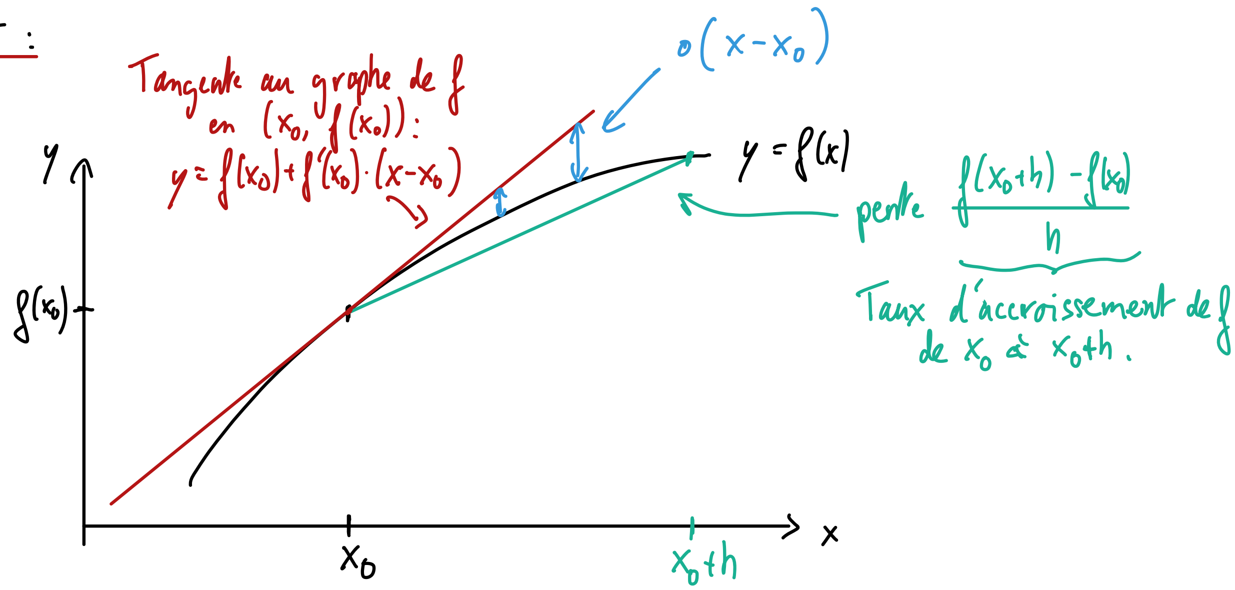
Preuve : $(B) \overset{\text{déf. de } o(\cdot)}{\iff} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = 0$

$\overset{\text{règles algébriques}}{\iff} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \overset{\text{pour } x = x_0 + h}{\iff} (A)$

Corollaire : f dérivable en $x_0 \Rightarrow f$ continue en x_0

Preuve : On a $\lim_{x \to x_0} f(x) \overset{(B)}{=} \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underset{x_0}{o}(x - x_0) \right) = f(x_0)$ ■

Graphiquement :



Def : • Si $f : D \to \mathbb{R}$ admet une dérivée en tout point de $D(f') \subset D$, on dit que f est dérivable / différentiable sur $D(f')$ et on définit la dérivée de f comme :
$$f' : \begin{vmatrix} D(f') \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{vmatrix}.$$

• Si f' est dérivable sur $D(f'') \subset D(f')$ on note $f^{(2)}$ ou f'' la dérivée seconde de f, égale à $f'' = (f')'$.

• Pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable sur $D(f^{(n)})$ alors on dit que f est n-fois dérivable sur $D(f^{(n)})$ et on note $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ sa dérivée n-ième.

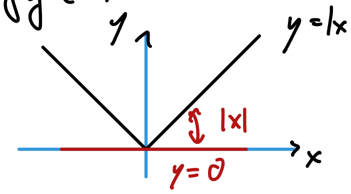
Def : • La dérivée à droite de f en x_0 est $f'_d(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

• La dérivée à gauche de f en x_0 est $f'_g(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Exemple : Si $f(x) = |x|$ alors
$$\begin{cases} f'_d(0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{|h+0|-|0|}{h} = 1 \\ f'_g(0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{|h+0|-|0|}{h} = -1 \end{cases}$$

Prop (immédiat). $\left(f'(x_0) = \ell \right) \iff \left(f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = \ell \right)$.

Ainsi $x \mapsto |x|$ pas dérivable en 0 car $f'_d(0) \neq f'_g(0)$.



4.2 Propriétés des dérivées.

Thm: Soient $f, g : D \to \mathbb{R}$ dérivables en a et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

(i) $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$ (linéarité de la dérivée).

(ii) $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ (règle du produit)

(iii) Si $g(a) \neq 0$, $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}$

(iv) Si $g(a) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{g(a)^2}$ (règle du quotient).

Preuve : (i) (à vérifier)

(ii) $$\frac{1}{h}\Big((f\cdot g)(a+h) - (f\cdot g)(a)\Big) = \frac{1}{h}\Big(f(a+h)\,g(a+h) - f(a)\,g(a+h) + f(a)\,g(a+h) - f(a)\,g(a)\Big)$$

$$= g(a+h) \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + f(a) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

g dériv. en $a \Rightarrow$ continue en a

$$\xrightarrow[h \to 0]{} g(a) \cdot f'(a) + f(a) \cdot g'(a)$$ (règles algébriques des limites)

(iii) $$\frac{1}{h}\left(\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)\right) = \frac{1}{g(a) \cdot g(a+h)} \cdot \frac{g(a) - g(a+h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{g(a)^2} \cdot (-g'(a))$$

g continue en $g(a) \neq 0$.

(iv) combiner (ii) et (iii).

Prop ("chain rule"). Si $f : D \to E$ dérivable en a, $g : E \to \mathbb{R}$ dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a)).$$

Preuve : voir exercices.

Prop. (dérivée de la réciproque). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ strict. monotone et continue sur I, dérivable en $a \in I$ avec $f'(a) \neq 0$. Alors $f^{-1} : f(I) \to I$ est dérivable en $b = f(a)$ et :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \quad \text{ou bien} \quad (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Preuve. On sait déjà $f(I)$ intervalle et f^{-1} continue. On a $\forall y \in f(I) \setminus \{b\}$,

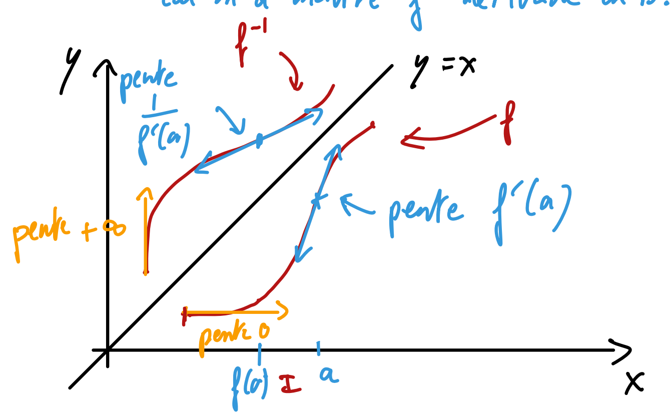
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y-b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)} = \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}\right)^{-1} \xrightarrow[y \to f(a)]{} \frac{1}{f'(a)}$$

Par composition des limites, car $f^{-1}(y) \xrightarrow[y \to f(a)]{} a$ et $\frac{f(z) - f(a)}{z-a} \xrightarrow[z \to a]{} f'(a) \neq 0$ ∎

Rmq : * Mémnotechnique : $(f \circ f^{-1})'(b) = \begin{cases} 1 & \text{car } (f \circ f^{-1})(x) = x \text{ sur } f(I) \\ \underbrace{(f^{-1})'(b)}_{\text{car on a montré } f^{-1} \text{ dérivable en } b.} \cdot f'(f^{-1}(b)) & \text{(chain rule)} \end{cases}$

Donc $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

* Graphiquement :



4.3 Quelques exemples

$D(f)$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n<0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
Fonction f	$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{Z}$	sin	cos	tan	arctan
Dérivée f'	$x \mapsto n \cdot x^{n-1}$	cos	− sin	$1 + \tan \times \tan$	$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

(0) Fonction constante : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$ où $c \in \mathbb{R}$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0$

(1) $f_n(x) = x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et avec $n \in \mathbb{N}^*$

On a $f_n'(x) = \lim_{y \to x} \dfrac{y^n - x^n}{y - x} = \lim_{y \to x} y^{n-1} + xy^{n-2} + \dots + x^{n-2}y + x^{n-1} = n x^{n-1}$

$(y-x)\cdot(y^{n-1} + xy^{n-2} + \dots + x^{n-1}) = y^n \underbrace{- xy^{n-1} + xy^{n-1} - \dots + \dots}_{=0} - x^n$

(2) $g_n(x) = \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $D = \mathbb{R}^*$

Règle de l'inverse : $g_n'(x) = \dfrac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -nx^{-n-1}$

(3) $f(x) = \sin(x)$ sur $D = \mathbb{R}$.

On a : $f(y) - f(x) = \sin(y) - \sin(x) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$

Or $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sin(h)}{h} = 1$ donc $\lim_{y \to x} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = \cos(x)$

→ La dérivée de sin est cos. La dérivée de $\cos(\cdot) = \sin(\cdot + \frac{\pi}{2})$ est $\cos(\cdot + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\cdot)$

(4) $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

Règle du quotient : $f'(x) = \dfrac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \dfrac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$

(5) $f(x) = \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$

Dérivée de la réciproque : $f'(x) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \dfrac{1}{1 + \tan(\arctan(x))^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Fin 04/11