2) Décomposition en éléments simples

Concentrons nous maintenant sur l'intégration de $R_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$.

Par le thm. fondamental de l'algèbre, on peut toujours factoriser Q_2 sous la forme :

$$Q_2(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{m} (x^2 + b_j x + c_j)^{\ell_j}$$

où
- $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}^*$
- $\ell_1, \dots, \ell_m \in \mathbb{N}^*$
- les facteurs sont distincts et irréductibles (donc $b_j^2 - 4c_j < 0, \ \forall j$).

Méthode :
- les coefficients a_i se trouvent en cherchant les racines de Q_2.
- quand une racine est trouvée, on factorise à l'aide d'une division de polynôme.

On peut alors toujours trouver des réels $\alpha_{i,r}, \beta_{j,r}, \gamma_{j,r}$ tels que

$$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{k_i} \frac{\alpha_{i,r}}{(x-a_i)^r} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{\ell_j} \frac{\beta_{j,r} x + \gamma_{j,r}}{(x^2 + b_j x + c_j)^r}$$

Exemple : Prenons $R_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{3x+1}{x^3 + x^2 - 2}$ (a bien la forme adéquate).

- Factorisons Q_2 : 1 est une racine évidente. On cherche le facteur de $(x-1)$;

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + x^2 - 2 & x - 1 \\
\cline{2-2}
-(x^3 - x^2) & x^2 + 2x + 2 \\
\hline
2x^2 - 2 & \\
-(2x^2 - 2x) & \\
\hline
2x - 2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Donc $Q_2(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 2)$

le discriminant est $4-8=-4<0$
donc ce facteur est irréductible (dans $\mathbb{R}$).

On peut donc trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$R_2(x) = \frac{3x+1}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2+2x+2}$$

$$= \frac{x^2(\alpha+\beta) + x(2\alpha-\beta+\gamma) + (2\alpha-\gamma)}{(x-1)(x^2+2x+2)}$$

Par identification des coefficients on a : $\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ 2\alpha-\beta+\gamma=3 \\ 2\alpha-\gamma=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-\beta & (1) \\ 3\alpha+\gamma=3 & (2) \\ 2\alpha-\gamma=1 & (3) \end{cases}$

$(2)+(3) \Rightarrow 5\alpha=4 \Rightarrow \alpha=\frac{4}{5}$

donc $\beta = \frac{-4}{5}$ et $\gamma = 2\alpha - 1 = \frac{3}{5}$.

$$R_2(x) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{5} \cdot \frac{-4x+3}{x^2+2x+2}$$

Reste à déterminer les primitives de chaque terme.

3) Intégration des éléments simples (E.S)

- l'intégration des E.S. du 1er ordre se fait directement :

$$\int^x \frac{\alpha}{(t-a)^n}\,dt = \begin{cases} \alpha \log(|x-a|) + C & \text{si } n=1 \\ \frac{\alpha}{1-n}(x-a)^{1-n} + C & \text{si } n \geq 2 \end{cases}, \; C \in \mathbb{R}$$

notation pour une primitive

- technique pour l'intégration des E.S du 2ème ordre : $\int^x \frac{\beta t + \gamma}{(t^2+bt+c)^n}\,dt$?

$\longrightarrow$ Se ramener à une forme :

$$A\int^x \frac{2t+b}{(t^2+bt+c)^n}\,dt + B\int^x \frac{f'(t)}{(f(t)^2+1)^n}\,dt \quad \text{avec } f \text{ affine.}$$

S'intègre comme ci-dessus — Donne $I_n(f(x)) + C$ (7.7 c]).

Exemple : $\displaystyle\int^x \frac{-4y+3}{y^2+2y+2}\,dy = -2\int^x \frac{2y+2}{y^2+2y+2} + 7\int^x \frac{dy}{(y+1)^2+1}$

$$= -2\log(|x^2+2x+2|) + 7\arctan(x+1) + C, \quad C\in\mathbb{R}$$

Remarque : certains changements de variable mènent à des fonctions rationnelles.

Notons R une fonction rationnelle quelconque.

Si l'on veut intégrer :	...	on fait le changement de variable :
$R(e^x, \cosh(x), \sinh(x))$	...	$x = \log t$
$R(\sin(x), \cos(x))$	...	$x = 2\arctan(t)$

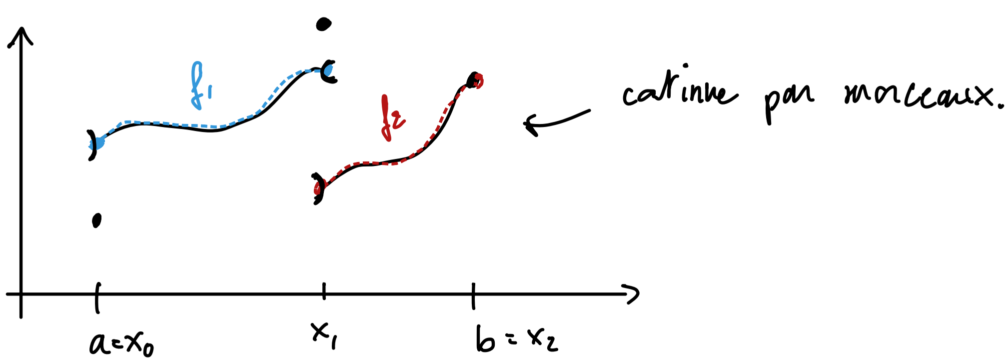
(et bien d'autres exemples...)

Calcul d'intégrales en ligne : wolfram alpha (pas Chat GPT).

7.9 Intégration des fonctions continues par morceaux

Def : Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a<b)$ est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ de $[a,b]$ et n fonctions $f_i \in C^0([x_{i-1}, x_i])$ telles que

$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \forall x \in]x_{i-1}, x_i[\text{ on ait } f(x) = f_i(x).$$



Prop : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux alors elle est intégrable et $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx$.

Preuve : Sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, f est intégrable car elle coïncide avec $f_i \in C^0([x_{i-1}, x_i])$ sauf en deux points (au plus).

Donc f est intégrable sur $[a,b]$ (en tant qu'union finie de segments sur lesquels f est intégrable). ■

Remarques :

- $x \longmapsto \int_a^x f(x)\,dx$ est Lipschitzienne mais pas dérivable en général.
- f n'admet pas, en général, de primitive sur $[a,b]$.

Chapitre 8 : Intégrales généralisées

Objectif : étudier $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$, $\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{x}\,dx$, etc

8.1 Intégrales généralisées sur un intervalle borné

8.1.1 Définitions

Soit $f \in C^0([a,b[)$ et $F : \left| \begin{array}{l} [a,b[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \end{array} \right.$

Def : Si $\lim_{x\to b-} F(x) = \ell \in \mathbb{R}$ on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{b-} f(x)\,dx$ $\left(\text{ou } \int_a^b f(x)\,dx\right)$ converge et vaut ℓ.

Sinon on dit que l'intégrale diverge.

De même soit $f \in C^0(]a,b])$ et $F : \left| \begin{array}{l}]a,b] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt. \end{array} \right.$

Def : Si $\lim_{x\to a+} F(x) = \ell \in \mathbb{R}$ on dit que l'intégrale généralisée $\int_{a+}^b f(x)\,dx$ converge et vaut ℓ. Sinon on dit que l'intégrale diverge.

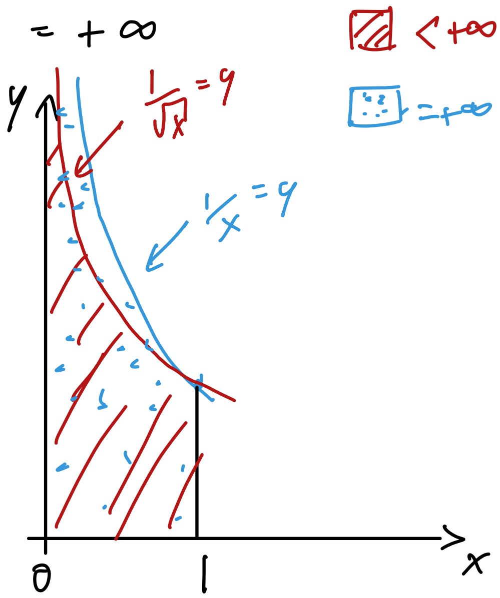
8.1.2 Exemple fondamental.

Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \in [a,b[$:

$$F(x) := \int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \left[-\frac{(b-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_a^x$$

On obtient que $\displaystyle\int_a^{b-} \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ $\begin{cases} \text{converge si } \alpha < 1 \text{ et vaut } \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ \text{diverge si } \alpha > 1 \end{cases}$

Pour $\alpha = 1$: $\displaystyle\lim_{x \to b-} \int_a^x \frac{dt}{b-t} = \lim_{x \to b-} \left[-\log(b-t) \right]_a^x = +\infty$



$$\boxed{\begin{array}{l} \text{En résumé : } \displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha < 1 \\ \text{De même : } \displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha < 1 \end{array}}$$

Remarque :

- l'intégrale peut converger même l'intégrande diverge en a ou en b !
- cf. paradoxe de la trompette de Gabriel (Toricelli, 1640)

8.1.3 Quelques propriétés de l'intégrale généralisée

- Linéarité : (conséquence de la linéarité de la limite)

  Si $\int_a^{b-} f(x)\,dx$ et $\int_a^{b-} g(x)\,dx$ convergent et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

  $\int_a^{b-} (\alpha f + \beta g)(x)\,dx$ converge et vaut $\alpha \int_a^{b-} f(x)\,dx + \beta \int_a^{b-} g(x)\,dx$

- Relation avec l'intégrale non-généralisée :

  Soit $f \in C^0([a,b[)$ telle que $\lim_{x \to b-} f(x) = l \in \mathbb{R}$,

  Soit $\hat{f} \in C^0([a,b])$ son prolongement par continuité en b.

  Alors, par continuité de l'intégrale en fonction de la borne sup. :

  $$\int_a^{b-} f(x)\,dx = \lim_{x \to b-} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b \hat{f}(x)\,dx.$$

fin 09/12

- Conservation des relations d'ordre (comme pour les intégrales classiques).