# Analyse Avancée 1 : Analyse Réelle

(MATH-100(a))

EPFL - Section MA

Automne 2024

Professeur : Lénaïc Chizat

But du cours :

Organisation :

- 1 ECTS $\simeq$ 1h30 travail / semaine

  $\rightsquigarrow$ 9 ECTS $\simeq$ 12h travail / semaine (3h cours + 3h exos + 6h travail personnel)
- exercices :
  - série du mardi libérée le jeudi précédent
  - du jeudi — le lundi
  - correction libérée après la séance.
- 21 assistants
- Examens : questions ouvertes (pas de document ni calculatrice).

# Chapitre 0 : Ensemble des nombres réels

## 0.1 Rappels

- Ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- ——— des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- ——— des nombres rationnels $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \; ; \; p, q \in \mathbb{Z}, \; q \neq 0\right\}$

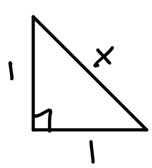
Tout rationnel $x$ admet une unique forme irréductible

$$x = \frac{p}{q} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ p, q \text{ premiers entre eux.} \end{cases}$$

Ex : $\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ forme irreductible.

**Problème :** $\mathbb{Q}$ ne contient pas toutes les grandeurs mesurables.

Exemple :




par le Thm. de Pythagore $x^2 = 2$.

**Proposition :** $\forall x \in \mathbb{Q}$, on a $x^2 \neq 2$.

"Pour tout"

**Preuve :**

- D'abord remarquons que $\forall n \in \mathbb{Z}$,
  - $n$ pair $\Rightarrow n^2$ pair
  - $n$ impair $\Rightarrow n^2$ impair

Donc $n$ pair $\underbrace{\Longleftrightarrow}_{\text{est équivalent à}}$ $n^2$ pair.

- Par l'absurde, supposons que $\underbrace{\exists}_{\text{il existe}} x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^2 = 2$

  Soit $x = \frac{p}{q}$ sa forme irréductible.

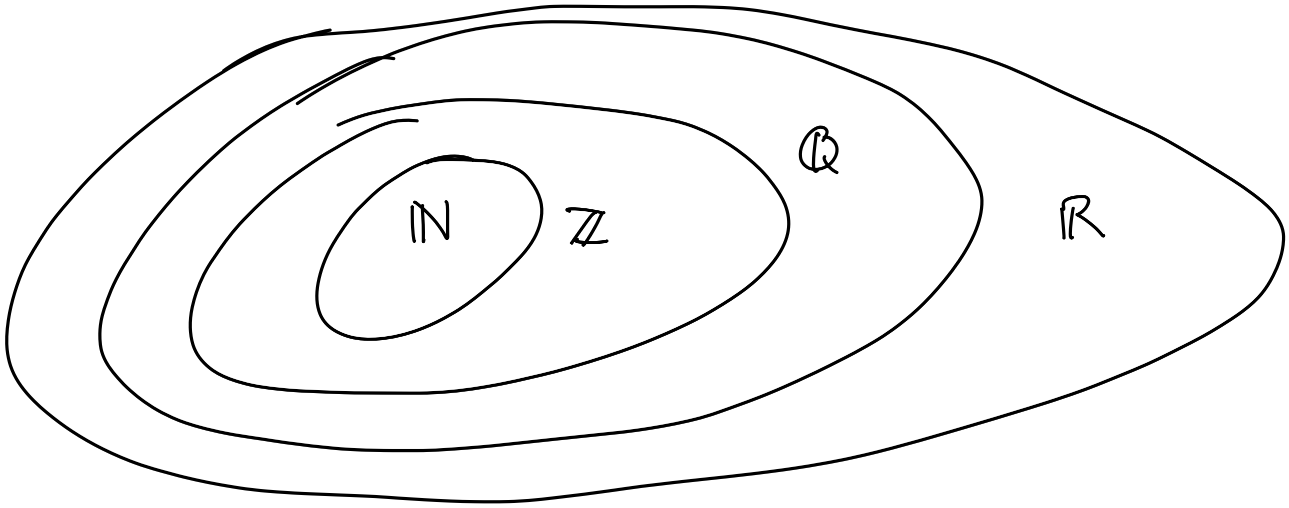
  On a $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{implique}} p^2 = 2q^2$

  Donc $p$ est pair : $\exists k \in \mathbb{Z}$, tel que $p = 2k$.

  Il s'ensuit : $(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$

  Donc $q$ est pair.

  On obtient une contradiction car on a supposé $p$ et $q$ premiers entre eux. On conclut $\forall x \in \mathbb{Q}$, $x^2 \neq 2$. ■




## 0.2 Corps des nombres réels $\mathbb{R}$

Ensemble des nombres réel :

- contient $\mathbb{Q}$ et toutes les "grandeurs mesurable".
- droite numérique "sans trous".

## Contenu de $\mathbb{R}$ :

- Peut se concevoir comme l'ensemble des écritures décimales infinies après la virgule, telle que :

$1,5000\ldots \quad ; \quad 1,41421356\ldots \quad ; \quad 3,345345345\ldots$

Subtilité : il faut identifier les suites infinies de 9 à leur arrondi supérieur, par exemple $4,129999\ldots = 4,13$

(Pourquoi ? Soit $x = 0,999\ldots$ . On a $10 \cdot x = 9,999\ldots = 9 + x$ donc $x = 1$).

Rmq : • le choix de base 10 est arbitraire (binaire, hexadecimale, ...)

• $\mathbb{Q}$ est exactement le sous-ensemble des écritures décimales périodiques à partir d'un certain rang.

## Structure de $\mathbb{R}$ :

l'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de :

- deux applications : l'addition $(x, y) \mapsto x + y$

(ou fonctions, opérations...) la multiplication $(x, y) \mapsto x \cdot y$

- une relation d'ordre : $x \leqslant y$ (ou $y \geqslant x$)

qui sont satisfont les axiomes suivants :

### Axiome 1 : structure de corps.

"pour tout"

$+$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x + (y + z) = (x + y) + z$ (+ est associatif)
- $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x + y = y + x$ (+ est commutatif)
- Il existe un élément noté $0$, $\forall y \in \mathbb{R},\ 0 + y = y$ (neutre pour +) — se lit "tel que"
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists (-x) \in \mathbb{R}, \quad x + (-x) = 0$ (inverse pour +)

$\times$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \cdot y = y \cdot x$
- Il existe un élement noté $1$, $\forall y \in \mathbb{R}, \ 1 \cdot y = y$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists (x^{-1}) \in \mathbb{R}, \quad x \cdot (x^{-1}) = 1$

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (distributivité de $\cdot$ sur +).

Rmq : On note $x-y = x+(-y)$ et $\frac{x}{y} = x \cdot \left(\frac{1}{y}\right) = x \cdot (y^{-1})$.

Exemples de corps : $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$

de pas corps : $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

## Axiome 2 : structure de corps ordonné

- $(x \leqslant y$ et $y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$ (transitive)
- $(x \leqslant y$ et $y \leqslant x) \Leftrightarrow x = y$ (reflexive et symétrique)
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a soit $x \leqslant y$ ou $x \geqslant y$ (ordre total)
- si $x \leqslant y$ alors $\forall z \in \mathbb{R}$, $x+z \leqslant y+z$
- Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ alors $x \cdot y \geqslant 0$

$\Big\}$ compatibilité avec + et .

Exemple de corps ordonnés : $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leqslant)$

pas ordonné : $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

## Axiome 3 : axiome de la borne supérieure : (étudié plus tard).

"Tout ensemble non-vide majoré de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant".

**Thm (admis)** : Il existe un unique* ensemble satisfaisant les Axiomes 1, 2 et 3. C'est $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leqslant)$.

(*) à isomorphisme près, c-à-d. à un re-étiquetage des éléments près.

Interprétation :
- ces axiomes suffisent à caractériser $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$ muni de ses opérations et ordre usuels satisfait ces axiomes.

## Sous-ensembles de $\mathbb{R}$ :

La relation $(x \leqslant y$ et $x \neq y)$ s'écrit $x < y$ (ou $y > x$).

**Déf** : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

extrémités/bornes de l'intervalle.

Intervalle ouvert $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \,;\, a < x < b\}$

Intervalle fermé $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,;\, a \leq x \leq b\}$

Intervalle semi-ouvert $[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \,;\, a \leq x < b\}$.

(ou $]a, b]$ de manière analogue.

Si $a = b$, $[a, a] = \{a\}$ "singleton a"

et $]a, a[ = \emptyset$ ensemble vide.

Cas particuliers : $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \,;\, 0 \leq x\}$

$\mathbb{R}_- = ]-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} \,;\, 0 \geq x\}$

Aussi $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \,;\, x \neq 0\}$ (pas un intervalle).

De même on définit $\mathbb{R}^*_-$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}^*_+$, etc.