Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Corrigé 9.2 – jeudi 14 novembre 2024

Exercice 1.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$.
   - Pour la fonction constante $f : x \mapsto C \in \mathbb{R}$ on a
   $$\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) = \lambda C + (1-\lambda)C = C = f(\lambda a + (1-\lambda)b)$$
   donc la fonction est convexe (elle est aussi concave).
   - Pour la fonction identité $f : x \mapsto x$, on a
   $$f(\lambda a + (1-\lambda)b) = \lambda a + (1-\lambda)b = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$
   donc la fonction est convexe (elle est aussi concave).
   - Pour la fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$, on a
   $$f(\lambda a + (1-\lambda)b) = |\lambda a + (1-\lambda)b| \leq |\lambda| \cdot |a| + |1-\lambda| \cdot |b| = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$
   donc la fonction est convexe.

2. Supposons que $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont convexes. Alors pour $a, b \in I$ et $\lambda \in [0,1]$, on a
$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(\lambda a + (1-\lambda)b) &= \alpha f(\lambda a + (1-\lambda)b) + \beta g(\lambda a + (1-\lambda)b)\\ &\leq \alpha\lambda f(a) + \alpha(1-\lambda) f(b) + \beta\lambda g(a) + \beta(1-\lambda) g(b)\\ &= \lambda(\alpha f + \beta g)(a) + (1-\lambda)(\alpha f + \beta g)(b)\end{aligned}$$
donc $\alpha f + \beta g$ est convexe. Remarquez que l'on a besoin que α et β soient positifs ou nuls pour que l'inégalité ne change pas de sens. Ce type particulier de combinaisons linéaires avec coefficients positifs s'appelle une *combinaison conique.*

Exercice 2.

1. Remarquons que $c = \lambda a + (1-\lambda)b \iff \lambda = \frac{b-c}{b-a}$ (et donc $1 - \lambda = \frac{c-a}{b-a}$). Reformulons la première inéqualité sous la forme de l'inégalité de convexité:
$$\begin{aligned}p(AC) \leq p(CB) &\iff \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}\\ &\iff (b-c)(f(c)-f(a)) \leq (c-a)(f(b)-f(c))\\ &\iff (b-a)f(c) \leq (b-c)f(a) + (c-a)f(b)\\ &\iff f(c) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).\end{aligned}$$
La dernière ligne est l'inégalité de convexité car on a posé $c = \lambda a + (1-\lambda)b$. Les deux autres équivalences s'obtiennent avec des manipulations similaires.

2. [$\Longrightarrow$] Soit $a, x, y \in I$ distincts tels que $x < y$. Si f est convexe, alors en utilisant les inégalités de la question précédente on a:
   - Si $a < x < y$ alors $\tau_a(x) \leq \tau_a(y)$ (par l'inégalité (ii))

- Si $x < a < y$ alors $\tau_a(x) \leq \tau_a(y)$ (par l'inégalité (i))
- Si $x < y < a$ alors $\tau_a(x) \leq \tau_a(y)$ (par l'inégalité (iii))

Dans tous les cas, on a donc $\tau_a(x) \leq \tau_a(y)$ ce qui montre que τ_a est une fonction croissante.
[$\Longleftarrow$] Soient $a, b \in I$ et $\lambda \in [0,1]$ et soit $c = \lambda a + (1-\lambda)b$. On peut supposer $a < b$ et $\lambda \in]0,1[$ (les cas $a = b$ et $\lambda \in \{0,1\}$ étant triviaux). Si τ_c est croissante alors $\tau_c(a) \leq \tau_c(b)$, c'est à dire $p(AC) \leq p(CB)$ ce qui, d'après la question précédente, est équivalent à $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$. Ceci montre l'implication réciproque.

3. Puisque f est convexe, pour tout $b \in \mathring{I}$ ($\mathring{I}$ represente l'intérieur de l'intervalle I, c'est à dire le plus grand intervalle ouvert inclus dans I) la fonction $\tau_b : I \setminus \{b\}$ définie à la question précédente est croissante. Soit $u \in [a, b[$. On a

$$\forall v \in]b, c[, \quad \tau_b(a) \leq \tau_b(u) \leq \tau_b(v) \leq \tau_b(c).$$

Ainsi τ_b est croissante sur $[b, c[$ et minorée par $\tau_b(u)$. Donc par un théorème du cours, τ_b admet une limite à droite en b, et donc f est dérivable à droite en b et

$$\tau_b(a) \leq \tau_b(u) \leq f'_d(b) \leq \tau_b(c).$$

Mais alors τ_b est croissante sur $[a, b[$ et majorée par $f'_d(b)$ donc admet une limite à gauche en b, et donc f est dérivable à gauche en b et

$$\tau_b(a) \leq f'_g(b) \leq f'_d(b) \leq \tau_b(c).$$

4. Soit $b \in \mathring{I}$. Comme f est dérivable à droite, resp. à gauche, en b on a nécessairement $\lim_{x \to b+} f(x) = f(b)$, resp. $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$. Ainsi $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$ et donc f est continue en b.
Remarque: Attention, la continuité n'est garantie que dans *l'intérieur* du domaine: il se peut que f soit convexe et pourtant discontinue sur le bord de son domaine. Par exemple, la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in]0,1[$ et $f(0) = f(1) = 1$ est convexe.

Exercice 3.

1. [$\Longrightarrow$] Supposons f convexe et soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. D'après l'exercice 2.3, on a

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{et} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$$

d'où $f'(a) \leq f'(b)$.
[$\Longleftarrow$] Réciproquement, supposons f' croissante sur I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$ (le cas $a = b$ sera trivial) et $\lambda \in]0,1[$ (les cas $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ seront triviaux); notons $c = \lambda a + (1-\lambda)b$. Appliquons le TAF à f sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$: il existe $x \in]a, c[$ et $y \in]c, b[$ tels que:

$$f(c) - f(a) = (c - a)f'(x) = (1-\lambda)(b-a)f'(x)$$
$$f(b) - f(c) = (b - c)f'(y) = \lambda(b-a)f'(y).$$

Puisque f' croît, $f'(x) \leq f'(y)$ et donc

$$\lambda(f(c) - f(a)) \leq (1-\lambda)(f(b) - f(c)) \implies f(c) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

On conclut que f est convexe.

2. C'est une conséquence directe du résultat précédent puisque l'on a (par un corollaire du Thm. des accroissements finis) f' croissante sur $I \iff f'' \geq 0$ sur I.

3. Toutes ces fonctions sont deux fois dérivables sur leur intervalle de définition et donc il suffit d'étudier le signe de leur dérivée seconde sur l'intervalle donné:

- Pour $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$: $f''(x) = 2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- Pour $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x}$: $f''(x) = 2x^{-3} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$
- Pour $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x)$: $f''(x) = \exp(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- Pour $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sqrt{x}$: $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
- Pour $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \log x$: $f''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4.

1. Si $f \in C^2(\mathbb{R})$ et si $x \in \mathbb{R}$, on peut considérer les formules de Taylor-Lagrange à l'ordre 2:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + \frac{f''(x+\theta h)}{2!}\,h^2, \quad \forall h \in \mathbb{R},$$
$$f(x-h) = f(x) - f'(x)\,h + \frac{f''(x+\tilde{\theta} h)}{2!}\,h^2, \quad \forall h \in \mathbb{R},$$

où θ et $\tilde{\theta}$ sont des fonctions de h telles que $|\theta| < 1$ et $|\tilde{\theta}| < 1$. Ainsi on obtient, si $h \neq 0$:

$$\left| \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - f''(x) \right| \leq \frac{1}{2}\left| f''(x+\theta h) - f''(x) \right| + \frac{1}{2}\left| f''(x+\tilde{\theta} h) - f''(x) \right|.$$

Puisque f'' est continue, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left| f''(x+\theta h) - f''(x) \right| \leq \varepsilon, \quad \text{si } |h| \leq \delta,$$
$$\left| f''(x+\tilde{\theta} h) - f''(x) \right| \leq \varepsilon, \quad \text{si } |h| \leq \delta.$$

On obtient ainsi, si $0 < |h| \leq \delta$:

$$\left| \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} - f''(x) \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

NB: on peut aussi utiliser Taylor-Young (qui est un peu plus pratique ici), mais c'est un Thm. que nous n'avions pas encore vu quand la série a été libérée.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ convexe. Alors pour tout $x, h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, on a, en prenant $a = x - h$, $b = x + h$, et $\lambda = 1/2$ dans l'inégalité de convexité:

$$f(x) \leq \frac{1}{2} f(x-h) + \frac{1}{2} f(x+h).$$

Ceci implique $\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \geq 0$ et on obtient l'inégalité voulue en prenant la limite $h \to 0$.