Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Corrigé 9.1 – mardi 12 novembre 2024

Exercice 1.

Si $0 \neq x \in [-1,1]$, on a
$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$
Ainsi $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$.

D'autre part,
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 0.$$

De plus, il n'y a pas de “problème” aux points $x = 1$ et $x = -1$ (la dérivée se prolonge continûment en ces points). Ainsi, $f' \in C^0([-1,1])$ et donc $f \in C^1([-1,1])$.

Si $0 \neq x \in [-1,1]$, on a
$$f''(x) = 6x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - 4\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
et ainsi $\lim_{x\to 0} f''(x)$ n'existe pas. La fonction f n'est donc pas dans $C^2([-1,1])$. En effet, sans même se demander si f' a une dérivée en $x = 0$, on voit que f'' ne peut pas être continue en ce point.

En conclusion, $f \in C^0([-1,1])$ et $f \in C^1([-1,1])$, mais $f \notin C^m([-1,1])$ si $m \geq 2$ (en effet, pour $m > 2$, on a $C^m([-1,1]) \subset C^2([-1,1])$ donc $f \notin C^2([-1,1]) \implies f \notin C^m([-1,1])$).

Exercice 2.

Par hypothèse, il existe $x_{0,1}, \ldots, x_{0,k} \in I$ tels que $x_{0,1} < \cdots < x_{0,k}$ et $f(x_{0,i}) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$.

En appliquant le Thm. de Rolle à f sur les intervalles $[x_{0,1}, x_{0,2}]$, $[x_{0,2}, x_{0,3}]$, …, $[x_{0,k-1}, x_{0,k}]$, on obtient l'existence de $x_{1,1}, \ldots, x_{1,k-1} \in I$ tels que $x_{1,1} < \cdots < x_{1,k-1}$ et $f'(x_{1,i}) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

En réitérant cette construction, à l'étape ℓ, on aura construit $(k-\ell)$ points distincts $x_{\ell,1}, \ldots, x_{\ell,k-\ell} \in I$ tels que $f^{(\ell)}(x_{\ell,i}) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k-\ell\}$.

Exercice 3.

Puisque f est dérivable sur $]a,b[$, elle est continue sur $]a,b[$.

On commence par noter une valeur arbitraire v de f, i.e. on choisit $z \in]a,b[$ quelconque et on pose $v = f(z)$.

À présent, puisque $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to b-} f(x) = +\infty$, il existe $\delta > 0$, $\delta < \frac{b-a}{4}$ tel que $f(x) > v$, $\forall x \in]a, a+\delta] \cup [b-\delta, b[$. En particulier, z appartient à l'intervalle ouvert $]a+\delta, b-\delta[$.

Par continuité de f sur $[a+\delta, b-\delta]$, il existe un minimum sur cet intervalle, donc $c \in [a+\delta, b-\delta]$ avec $f(c)$ minimal pour cet intervalle. Notez que c doit appartenir à l'intervalle ouvert $]a+\delta, b-\delta[$ puisque $f(c) \leq f(z) = v$ et $v < f(a+\delta)$ et $v < f(b-\delta)$. Il suit donc que c est un point critique: $f'(c) = 0$.

Ceci montre l'exercice si $p = 0$. Dans le cas général, on applique l'argument précédent à la fonction $g(x) = f(x) - px$ après avoir vérifié que cette dernière conserve toutes les hypothèses faites sur f.

Exercice 4.

$\Longrightarrow$ Supposons f strictement croissante sur I. D'après le Thm. du cours (corollaire du TAF) on a déjà $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Pour montrer la deuxième propriété, raisonnons par l'absurde: supposons qu'il existe $c, d \in I$ tel que $c < d$ et

$$]c, d[\subset \{x \in I \ ; \ f'(x) = 0\}.$$

Ceci signifie que $\forall x \in]c, d[, \ f'(x) = 0$ et donc, d'après le corollaire du TAF, f est constante sur $[c, d]$, donc pas strictement croissante, ce qui contredit notre hypothèse. On conclut donc que si J est un intervalle et $J \subset \{x \in I \ ; \ f'(x) = 0\}$ alors J est un singleton.

$\Longleftarrow$ Supposons maintenant:

$$\begin{cases} \forall x \in I, \ f'(x) \geq 0 \\ \text{Si } J \text{ est un intervalle et } J \subset \{x \in I \ ; \ f'(x) = 0\} \text{ alors } J \text{ est un singleton.} \end{cases}$$

D'après le corollaire du TAF, on sait que f est croissante sur I. Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas strictement croissante sur I. Il existe donc $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$. Comme f est croissante sur I, on a alors

$$\forall x \in [x_1, x_2], \quad f(x) = f(x_1),$$

et donc $]x_1, x_2[\subset \{x \in I \ ; \ f'(x) = 0\}$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc f est strictement croissante sur I.

Exercice 5.

1.
   - Puisque f est dérivable, elle est continue.
   - Puisque $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell > 0$, il existe $M > 0$ tel que $f'(x) \geq \frac{\ell}{2} > 0$, $\forall x \geq M$. Ainsi f est croissante sur $]M, +\infty[$.
   - Ab absurdo, si $\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq +\infty$, alors f est bornée sur $[M, +\infty[$ (puisqu'elle est croissante !) et on a donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - Pour tout $x \in [M, +\infty[$, par le théorème des accroissements finis, il existe alors $\xi = \xi(x) \in]x, x+1[$ tel que
   $$\frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f'(\xi).$$
   - En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $0 = \frac{\alpha - \alpha}{1} = \ell$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\ell > 0$.

2. Revenons à la définition des limites.
   Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque $f' \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$, il existe $A \in]0; +\infty[$ tel que :
   $$\forall t \in]0; +\infty[, \quad t \geq A \Rightarrow |f'(t) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
   Soit $x \in]A, +\infty[$; le *théorème des accroissements finis*, appliqué à f sur l'intervalle $[A, x]$, montre l'existence de $c_x \in]A, x[$ tel que :
   $$\frac{f(x) - f(A)}{x - A} = f'(c_x).$$
   Essayons maintenant de rattacher l'étude de $\frac{f(x)}{x}$ à celle de
   $$\frac{f(x) - f(A)}{x - A}.$$

Comme, pour tout $x \in]A;+\infty[$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(A)}{x-A}\left(1-\frac{A}{x}\right) + \frac{f(A)}{x},$$

on déduit :

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x} - l\right| &\leq \left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - l\right| + \left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A}\frac{A}{x}\right| + \frac{|f(A)|}{x} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{x}\left((|l| + \frac{\varepsilon}{2})A + |f(A)|\right)\end{aligned}$$

Comme

$$\frac{1}{x}\left((|l| + \frac{\varepsilon}{2})A + |f(A)|\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

il existe $B \in]A;+\infty[$ tel que :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad x > B \Rightarrow \frac{1}{x}\left((|l| + \frac{\varepsilon}{2})A + |f(A)|\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad (x > B \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x} - l\right| \leq \varepsilon)$.

Ainsi : $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$.