Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Corrigé 8.2 – jeudi 7 novembre 2024

Exercice 1.

Exprimons les hypothèses sous une forme équivalente:

- Comme f est dérivable en a, on a $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon_1(x-a)$, $\forall x \in I$, pour une certaine fonction ϵ_1 qui satisfait $\lim_{h\to 0}\epsilon_1(h) = 0$;
- Comme g est dérivable en $f(a)$, on a $g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + (y - f(a))\epsilon_2(y - f(a))$, $\forall y \in J$, pour une certaine fonction ϵ_2 qui satisfait $\lim_{h\to 0}\epsilon_2(h) = 0$;

En prenant $y = f(x)$, il s'ensuit:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + (f(x) - f(a))\epsilon_2(f(x) - f(a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot (x-a) + \underbrace{g'(f(a)) \cdot (x-a) \cdot \epsilon_1(x-a)}_{r_1(x-a)} + \underbrace{(f(x) - f(a))\epsilon_2(f(x) - f(a))}_{r_2(x-a)} \end{aligned}$$

Or on a

$$\frac{r_1(x-a)}{x-a} = g'(f(a))\cdot\epsilon_1(x-a) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{r_2(x-a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\epsilon_2(f(x)-f(a)) \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)\cdot 0 = 0.$$

Ainsi $r_1(x-a) + r_2(x-a) = o(x-a)$. On a donc montré:

$$g(f(x)) = g(f(a)) + g'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot (x-a) + o(x-a)$$

ce qui est équivalent au fait que $g \circ f$ est dérivable en a, de dérivée $g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Remarque: Il existe une autre approche pour démontrer cette formule qui consiste à écrire:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \begin{cases} 0 = g'(f(a)) \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } f(x) = f(a) \\ \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } f(x) \neq f(a). \end{cases}$$

Dans les deux cas, l'expression admet pour limite $g'(f(a))f'(a)$ (notamment, pour le deuxième cas, car $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ et par composition des limites), ce qui montre le théorème. Cette approche est directement liée à la façon "physicienne" d'écrire symboliquement la *chain rule* qui est, si l'on pose $y = f(x)$ et $z = g(y)$:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Ici on a utilisé la *notation de Leibniz* pour les dérivées, qui correspond à $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = g'$ et $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (g \circ f)'$ (notez que cette notation laisse une ambiguïté à propos des points en lesquels ces fonctions sont évaluées).

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

- f est dérivable en zéro car $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x} = 0$.

- f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On montre pour cela que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^*$. En effet, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^*$, on peut construire une suite $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{Q}$ et une suite $(b_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0 \in \mathbb{R}^*.$$

Puisque

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = x_0^3 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f(b_n),$$

on en déduit que la fonction f n'est pas continue en x_0.

Exercice 3.

(i) Les propriétés vues en cours s'appliquent sans problème :

$$f'(x) = \frac{1 + x^4 - x \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{1 - 3x^4}{(1+x^4)^2}.$$

(ii) Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, alors il existe $z \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in]z, z+1[$. Ainsi $f(x) = x^2 z$ et

$$f'(x) = 2xz = 2\lfloor x \rfloor x \text{ pour tout } x \in \,]z, z+1[.$$

- Si $x = 0$, $f(0) = 0$. Par ailleurs, si x est dans un voisinage suffisamment petit de 0, alors $f(x) = 0$ ou $f(x) = -x^2$ selon le signe de x. Il s'ensuit que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ et donc $f'(0) = 0$.
- Si $x \in \mathbb{Z}^*$ alors $\lim_{x\to z^-} f(x) = z^2(z-1)$ et $\lim_{x\to z^+} f(x) = z^3$. Ainsi f n'est pas continue en z et donc $f'(z)$ n'existe pas.

En résumé : $f'(x) = 2\lfloor z \rfloor x$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$ et cette formule reste correcte dans le cas spécial $x = 0$; par contre, $f'(x)$ n'existe pas si $x \in \mathbb{Z}^*$.

Exercice 4.

$[\Longrightarrow]$: Si f est dérivable alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a),$$

et par suite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}.$$

Par ailleurs, puisque $h \to 0 \iff -h \to 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a) - f(a+h)}{-h} = f'(a).$$

Donc la limite demandée est bien $\frac{1}{2} f'(a) + \frac{1}{2} f'(a) = f'(a)$.

$[\Longleftarrow]$: En revanche, l'existence de cette dernière limite n'entraîne pas celle de $f'(a)$, même si f est continue en a. Voici un contre-exemple : $f(x) = |x|$ et $a = 0$.

Exercice 5.

On a que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2},$$

et que $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ car, d'après les règles de dérivation, sa dérivée en tout ordre peut s'exprimer comme une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$. Montrons la formule pour la dérivée n-ième sur $\mathbb{R}^*$ par récurrence sur n. En calcul préliminaire, remarquons que pour $u \in \mathbb{R}^*$, si l'on écrit $s = \sin(\arctan(u))$ et $c = \cos(\arctan(u))$ alors on a $c^2 + s^2 = 1$ et $(s/c) = \tan(\arctan(u)) = u$. En résolvant ce système d'équations, on obtient $s = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$ et $c = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$ (pour déterminer le signe de s on a utilisé le fait qu'il doit être le même que celui de u).

Récurrence sur n

1) Pour $n = 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin\left(n \arctan \frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \sin\left(\arctan \frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1/x}{\sqrt{1+(1/x)^2}} \\
&= \frac{1}{1+x^2} = \arctan'(x).
\end{aligned}$$

2) Supposons la formule vraie pour un entier n. L'expression de la dérivée à l'ordre n est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction arctan est $n+1$ fois dérivable. On utilise la notation de Leibniz: $f^{(n)}(x) \equiv \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$ qui est parfois plus pratique ou claire (notamment ici car il s'agit de différentier de grosses expressions). On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\arctan x)\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin\left(n \arctan \frac{1}{x}\right)\right) \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)! \left[-\frac{n}{2}(1+x^2)^{-n/2-1} 2x \sin\left(n \arctan \frac{1}{x}\right)\right. \\
&\quad \left. + (1+x^2)^{-n/2} n \cos\left(n \arctan \frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{(1/x)^2}{1+(1/x)^2}\right)\right] \\
&= (-1)^n n! (1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}} \left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sin\left(n \arctan \frac{1}{x}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cos\left(n \arctan \frac{1}{x}\right)\right] \\
&= (-1)^n n! (1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}} \sin\left((n+1) \arctan \frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

puisque

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos\left(\arctan \frac{1}{x}\right)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sin\left(\arctan \frac{1}{x}\right).$$

On a aussi utilisé la formule de trigonométrie: $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$.