Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Corrigé 8.1 – mardi 5 novembre 2024

Exercice 1.

1. L'étude de la convergence simple revient à étudier la convergence des suites $(f_n(x))_{n\geq 1}$, lorsque $x \geq 0$ est fixé. Mais x étant fixé, puisque $1+x>0$, on a $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/(1+x)$. Donc la suite de fonctions (f_n) tend simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$.
2. On calcule $f_n(x) - f(x)$, puis on majore $|f_n(x) - f(x)|$. On a

$$f_n(x) - f(x) = \frac{n}{1+n(1+x)} - \frac{1}{1+x} = \frac{n(1+x) - 1 - n(1+x)}{(1+x) + n(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)+n(1+x)^2}.$$

Or, pour $x \geq 0$, on a

$$1 + x + n(1+x)^2 \geq n(1+x)^2 \geq n$$

et donc

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{(1+x)+n(1+x)^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Cette dernière quantité ne dépend plus de $x \in [0,+\infty[$ et tend vers 0 (on a $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| \leq 1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$), donc (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,+\infty[$.

Exercice 2.

1. Soit $\varepsilon > 0$. On a

   (i) $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_1$, $\forall y \in I$, $|f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (convergence uniforme de (f_n) vers f)

   (ii) $\exists \delta > 0$, $\forall y \in I$, $(|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2})$ (continuité de f en x)

   (iii) $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N_2$, $|x_n - x| < \delta$ (convergence de (x_n) vers x)

   Alors on en déduit, pour tout $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, par (i) et (ii) avec $y = x_n$:

   $$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{1}$$

   Ceci montre que $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

2. On peut utiliser l'exemple vu en cours, avec $I = [0,1]$ et $\forall n \geq 1$

   $$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & \text{si } x \in [0, 1/(2n)] \\ 2 - 2nx & \text{si } x \in [1/(2n), 1/n] \\ 0 & \text{si } x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

   qui est dans $\mathcal{C}^0(I)$ pour tout $n \geq 1$ et converge simplement vers $f = 0 \in \mathcal{C}^0(I)$ (mais pas uniformément). Alors en prenant la suite définie par $x_n = 1/(2n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ et

   $$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 1 \neq f(0) = 0.$$

Exercice 3.

1. Montrons que $0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$, $\forall x \in [0,1]$.

   - Commençons par montrer par récurrence que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$, $\forall x \in [0,1]$.
   Puisque $P_0(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$, on a $0 \leq P_0(x) \leq \sqrt{x}$, $\forall x \in [0,1]$. Supposons donc que pour $n \geq 0$ on ait
   $$0 \leq P_j(x) \leq \sqrt{x}, \quad \forall x \in [0,1], \quad j = 0,1,2,\ldots,n$$
   et montrons que
   $$0 \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}, \quad \forall x \in [0,1].$$
   En utilisant la définition de P_{n+1} on a $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x))\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_n(x)\right)\right)$.
   Puisque par hypothèse de récurrence on a $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$, $\forall x \in [0,1]$, les facteurs
   $$\sqrt{x} - P_n(x) \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + P_n(x)\right),$$
   sont positifs ou nuls pour tout $x \in [0,1]$. Ainsi $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$, ce qui montre que $P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$. De façon évidente, puisque $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$, on a $P_{n+1}(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$ qui découle de la définition de P_{n+1}.
   - Puisque $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$, $\forall x \in [0,1]$, on a $x - P_n(x)^2 \geq 0$ et donc
   $$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n(x)^2\right) \geq P_n(x), \quad \forall x \in [0,1].$$
   Ainsi, la suite $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ est croissante.

2. Si $x \in [0,1]$ est fixé, la suite $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ est une suite numérique croissante et bornée par $\sqrt{x}$. Elle est donc convergente et on pose
   $$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x).$$
   On obtient ainsi $f(x) = f(x) + \frac{1}{2}\left(x - f(x)^2\right)$, ce qui implique $f(x)^2 = x$ et donc $f(x) = \sqrt{x}$ (le signe $-$ est à exclure car $P_n \geq 0$).
   Ainsi $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite croissante de fonctions continues sur $[0,1]$ qui converge ponctuellement vers la fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Le théorème de Dini permet de conclure que $\lim_{n\to\infty} P_n = f$ uniformément sur $[0,1]$.

3. La fonction $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ est définie par $g(x) = |x|$ (fonction paire). Puisque $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \sqrt{x}$ uniformément sur $[0,1]$, on a $\lim_{n\to\infty} P_n(x^2) = |x|$ uniformément sur $[-1,1]$ et $P_n(x^2)$ est un polynôme.

Exercice 4.

1. Par hypothèse, il existe $A_1, A_2 > 0$ et $C_1, C_2 > 0$ tels que $\forall x \geq A_1$ on a $|f(x)| \leq C_1|g(x)|$ et $\forall x \geq A_2$ on a $|g(x)| \leq C_2|h(x)|$. On en déduit que pour tout $x \geq \max\{A_1, A_2\}$, on a $|f(x)| \leq C_1 \cdot C_2 \cdot |h(x)|$, qui qui montre que $f = O(h)$ au voisinage de $+\infty$.

2. En posant $w_n = \sqrt{u_n v_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\frac{u_n}{w_n} = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{w_n}{v_n} = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Exercice 5.

Soit $\varepsilon > 0$. D'une part, la fonction f étant continue sur $[a,b]$, elle est uniformément continue sur cet intervalle. Par conséquent, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour tout couple $u, v \in [a,b]$ vérifiant $|u - v| \leq \delta$:
$$|f(u) - f(v)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, $\mathbb{R}$ étant archimédien, il existe un entier $m > 0$ tel que $\frac{b-a}{m} < \delta$ et posons $x_k = a + k\frac{b-a}{m}$ avec $k = 0, \ldots, m$. Ainsi, puisque la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f, à chaque entier $0 \leq k \leq m$, on peut associer un entier $n_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_k$:

$$|f_n(x_k) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, en posant $n_\varepsilon = \max(n_1, \ldots, n_m)$, on a que pour tout entier $0 \leq k \leq m$ et tout $n \geq n_\varepsilon$:

$$|f_n(x_k) - f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $x \in [a, b]$ et $n \geq n_\varepsilon$. Alors, il existe un entier $1 \leq p \leq m$ tel que $x_{p-1} \leq x \leq x_p$, et la fonction f_n étant croissante, on a :

$$f_n(x) - f(x) \leq f_n(x_p) - f(x) = (f_n(x_p) - f(x_p)) + (f(x_p) - f(x) \leq \varepsilon$$

et

$$f_n(x) - f(x) \geq f_n(x_{p-1}) - f(x) = (f_n(x_{p-1}) - f(x_{p-1})) + (f(x_{p-1}) - f(x)) \geq -\varepsilon.$$

D'où $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Ce résultat étant valable quel que soit $x \in [a, b]$, on a ainsi démontré que pour tout entier $n \geq n_\varepsilon$:

$$\sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui revient à dire que la convergence est uniforme.