Analyse avancée 1
Mathématiques 1$^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

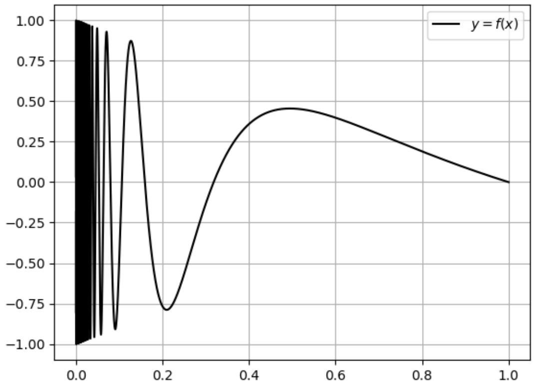
Corrigé 7.1 – mardi 29 octobre 2024

Exercice 1.

1. On a $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, ce qui implique $f(0) = 0$.
2. Si $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, on a
$$f(x_n + a) = f(x_n) + f(a) \implies f(x_n) = f(x_n + a) - f(a).$$
On pose $a_n = x_n + a$ et puisque $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Comme f est continue en a, on a
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (f(a_n) - f(a)) = 0 = f(0).$$
Ainsi f est continue en $x = 0$.
3. Si $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ converge vers $b \in \mathbb{R}$, on a
$$f(b_n) = f(b_n - b + b) = f(b_n - b) + f(b) \Rightarrow f(b_n) - f(b) = f(b_n - b).$$
Puisque $\lim_{n\to\infty}(b_n - b) = 0$ et f est continue en $x = 0$, on conclut que
$$\lim_{n\to\infty}(f(b_n) - f(b)) = 0.$$
4. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$f(n) = f(n-1) + f(1) = f(n-2) + 2f(1) = \ldots = f(0) + nf(1) = nf(1).$$
De même on a $f(-n) = -nf(1)$. Ainsi $\forall z \in \mathbb{Z}$ on a $f(z) = zf(1)$.
5. Si $x \in \mathbb{Q}$, on a $x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ et
$$pf(1) = f(p) = f\left(q\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right).$$
Ainsi $f(x) = xf(1), \forall x \in \mathbb{Q}$. La fonction g définie par $g(x) = xf(1)$ est trivialement continue et de $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{Q}$, on déduit $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ par densité de $\mathbb{Q}$.
$$f(x) = xf(1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.

La fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = (1-x)\sin(1/x)$ satisfait $f(]0,1]) =]-1,1[$. En effet, soit $I = f(]0,1])$. On sait que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, donc I est un intervalle. Il reste à déterminer ses bornes $\inf(I)$ et $\sup(I)$ et déterminer s'il les contient. On peut construire deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\lim f(a_n) = 1$ et $\lim f(b_n) = -1$ (par exemple, prendre $a_n = 1/(2n\pi + \pi/2)$ et $b_n = 1/(2n\pi - \pi/2)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$). Donc $\inf(I) \leq -1$ et $\sup(I) \geq -1$. Mais par ailleurs, puisque $|\sin(1/x)| \leq 1$, on a $|f(x)| \leq |1-x| < 1$, $\forall x \in]0,1]$, donc $I =]-1,1[$.



Graphe de $f(x) = (1-x)\sin(1/x)$.

Exercice 3.

i) La fonction $f(x) = x^5 - 3x - 1$ est un polynôme, donc elle est continue. On a $f(1) = -3$ et $f(2) = 25$, donc par le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0$, c'est-à-dire $x_0^5 - 3x_0 = 1$.

ii) On utilise le Théorème des valeurs intermédiaires sur la fonction continue $g(x) = f(x) - x$. Puisque $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$, on a $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. Donc il existe $\bar{x}$, t.q. $g(\bar{x}) = 0$, c'est-à-dire $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

iii) Donnons nous un grand cercle sur le globe terrestre (par exemple l'équateur) et un point x_0 sur ce cercle, et indiquons la position d'un point sur ce grand cercle par $x \in \mathbb{R}$ (sa position en radians par rapport à x_0, déterminée modulo 2π). On note $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $T(x)$ est la température au point x à un instant donné. Par construction, T est 2π-périodique, et on fait l'hypothèse (raisonnable) que T est continue. On pose maintenant $f(x) = T(x) - T(x+\pi)$ la différence de température en 2 points antipodaux. Si $f(0) = 0$ alors on a terminé. Sinon, supposons que $f(0) > 0$ (l'autre cas est similaire). Alors on a $f(\pi) = T(\pi) - T(2\pi) = T(\pi) - T(0) = -f(0) < 0$. Comme f est continue sur l'intervalle $[0, \pi]$, $f(0) > 0$ et $f(\pi) < 0$, on en déduit par le Thm. des valeurs intermédiaires qu'il existe $x_0 \in [0, \pi]$ tel que $f(x_0) = 0$ et donc $T(x_0) = T(x_0 + \pi)$.

Remarque: On peut même montrer, en utilisant des outils d'analyse (plus précisément de topologie) plus avancés (le Théorème de Borsuk-Ulam), qu'il existe toujours au moins un point à la surface de la Terre où la température *et* la pression de l'air sont identiques à celles de l'antipode. On pourra aussi regarder cette vidéo (en anglais) pour voir comment le théorème des valeurs intermédiaires garantit que l'on peut toujours stabiliser une table bancale en la tournant (du moment que le problème d'irrégularité vient du sol, et pas de la table).

Exercice 4.

On suppose f strictement croissante, l'autre cas se traitant de façon similaire.

1. Soit $a \in I$ tel que f est définie à droite de a. On a déjà vu (cours et série 6.2 exercice 4) que f admet une limite à droite en a et que

$$f(a) \leq \inf_{x \in I \cap]a,+\infty[} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) =: \ell.$$

Vérifions que $\ell = f(a)$ en supposant, par l'absurde que $f(a) < \ell$. Soit $b \in]a, +\infty[\cap I$ tel que $f(b) \geq \ell$. Puisque J est un intervalle, il contient l'intervalle $[f(a), f(b)]$ qui lui même contient ℓ et $(f(a) + \ell)/2$. Par surjectivité de f, il existe donc $z \in]a, b]$ tel que $f(z) = (f(a) + \ell)/2 < \ell$, ce qui est une contradiction (revoir la définition de ℓ en tant qu'infimum).

En résumé, $f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$, c'est à dire que f est continue à droite en a. Si f est définie à gauche de a on montre de même que $f(a) = \lim_{x\to a^-} f(x)$. Et aussi, si f est définie au voisinage de a, alors f est continue en a.

2. La fonction f, étant surjective strictement monotone sur I, est donc bijective. Autrement dit, la fonction $f : I \to J$ admet une fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$. D'autre part, J est un intervalle de $\mathbb{R}$ et on vérifie facilement que f^{-1} est strictement monotone sur J. Ainsi, $f^{-1} : J \to I$ est une fonction surjective strictement monotone sur un intervalle J, ce qui implique, d'après ce que nous venons de démontrer, que la fonction f^{-1} est continue sur J.

Exercice 5.

1. On cherche à faire apparaître une somme téléscopique. On a pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(3n+2)(3n-1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3N+2}\right) \to_{N\to\infty} \frac{1}{6}.$$

La série converge (absolument, car ses termes sont ≥ 0) et sa somme vaut $1/6$.

2. On cherche à faire apparaître une somme téléscopique. Il nous faut d'abord factoriser le dénominateur (en trouvant ses racines) $n^2 + 7n + 10 = (n+5)(n+2)$. On a pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+7n+10} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+5)(n+2)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+5}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4} - \frac{1}{N+5}\right) \to_{N\to\infty} \frac{47}{180}.$$

3. Soit $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $a = b$, alors $u_n = 0$ pour tout n, et donc (u_n) converge vers 0. Si $a > b$, alors a^n est prépondérant sur b^n au sens que

$$\frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \to 0$$

puisque $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$. On factorise donc par a^n au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{a^n\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n\left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}.$$

On en déduit que dans ce cas, (u_n) converge vers 1. Si $b > a$, on factorise cette fois par b^n et c'est $(a/b)^n$ qui converge vers 0. On trouve :

$$u_n = \frac{-1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n}.$$

(u_n) converge donc vers -1 dans ce cas.

4. Pour $n \geq 2$, on a

$$1 \leq \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! \leq \frac{1}{n!}(n! + (n-1)! + (n-2)(n-2)!) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}.$$

La première inégalité est obtenue en ne gardant que le plus grand terme de la somme, et la seconde en majorant les $(n-2)$ plus petits termes de la somme par $(n-2)!$. On en déduit, par le théorème d'encadrement, que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k! = 1$.