Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Corrigé 6.1 – mardi 15 octobre 2024

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective et impaire. Montrons que f^{-1} est aussi impaire. Pour cela, soit $y \in \mathbb{R}$. Par bijectivité, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$. Par conséquent, on a

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y).$$

On montre ainsi que f^{-1} est impaire.

Exercice 2.

On veut montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a

$$\sin(x) < x < \tan(x) \iff \sin(x) < x < \frac{\sin x}{\cos x} \iff 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \iff \cos(x) < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Remarquons que l'on a également pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$:

$$\cos(x) = \cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Donc, pour tout $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, nous avons la relation: $\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$. Comme $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$, on obtient par le théorème des gendarmes le résultat recherché.

Exercice 3.

a) On a

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \quad \text{et} \quad (x^2-1) = (x-1)(x+1).$$

Ainsi

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}, \quad \forall x \in D.$$

Si $x_0 = 1$, on a, par les règles algébriques des limites,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{2}.$$

b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

on a, pour tout $\epsilon > 0$,

$$|x - 0| \le \epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 0| \le \epsilon.$$

En posant donc $\ell = 0$, $x_0 = 0$ et $\delta = \epsilon$, on obtient:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \epsilon \text{ tel que si } |x - x_0| \le \delta \text{ alors } |f(x) - \ell| \le \epsilon,$$

ce qui prouve que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ lorsque $x_0 = 0$.

Ainsi donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

c) En reprenant la fonction ci-dessus et en posant $x_0 = 1$, on constate:

1°) Si $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$, est telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ et $a_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1$.

2°) Si $(b_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, est telle que $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ et $b_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = 0$.

Ces deux propriétés prouvent ensemble que $\lim_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas.

Exercice 4.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par:

$$A = \left\{ \frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \right\},$$

et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } x \in A, \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \notin (\mathbb{Q} \cup A). \end{cases}$$

Remarquons pour commencer que, puisque f est définie sur tout $\mathbb{R}$, on a que f est définie au voisinage de x_0 pour tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

1. *Montrons que f admet une limite en tous les points de A.*
   Soit donc $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ et posons $x_0 = \frac{1}{k\pi}$. Si $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ est une suite de nombres réels telle que $a_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, on va montrer que

   $$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$$

   ce qui montrera que

   $$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

   Si $\delta > 0$ est tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A = \{x_0\}$, alors il existe $N > 0$ tel que $\forall n \geq N$ on a $a_n \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Puisque on a supposé que $a_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on obtient si $n \geq N$: $a_n \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ et $a_n \notin A$. Ainsi, lorsque $n \geq N$:

   $$f(a_n) = \begin{cases} a_n \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) & \text{si } a_n \notin \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } a_n \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   On a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{x_0} = k\pi$ et $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = \sin(k\pi) = 0$. On conclut que

   $$\lim_{n\to\infty} a_n \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0.$$

   Soit maintenant $\epsilon > 0$. Il existe $M > N$ tel que $\forall n \geq M$ on a

   $$\left| a_n \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \right| \leq \epsilon.$$

   Si $n \geq M$, alors ou bien $a_n \in \mathbb{Q}$ et alors $f(a_n) = 0$, ou bien $a_n \notin \mathbb{Q}$ et dans ce cas $|f(a_n)| = \left| a_n \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \right| \leq \epsilon$. Dans tous les cas on a bien

   $$|f(a_n)| \leq \epsilon, \forall n \geq M,$$

   ce qui montre que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$ et donc que

   $$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

2. *Montrons que f n'admet pas de limite au point $x_0 = 0$.*

   En effet,

   - Si $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite telle que $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \notin (\mathbb{Q} \cup A)$, et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ on obtient $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.
   - Par contre, si $a_n = \frac{1}{n\pi}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ mais $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1$.

   Ceci prouve que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.

3. *Montrons que si $x_0 \notin A$, $\lim_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.*

   On a déjà montré que $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.

   Posons $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$. Si $x_0 \notin A$ et $x_0 \neq 0$, on montre que

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = x_0 \sin\left(\frac{1}{x_0}\right) \neq 0.$$

   - Si $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite telle que $a_n \notin (\mathbb{Q} \cup A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, on a $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = x_0 \sin\left(\frac{1}{x_0}\right) \neq 0$.
   - Par contre, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $(a_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$, $a_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ et on a $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$.

   Ce qui implique, encore une fois que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ n'existe pas.

Exercice 5.

Soit $a \in]0,1[$. Remarquons en premier lieu que f est bien définie au voisinage de a. Soit $\epsilon > 0$ et soit $N = \lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1$. On pose

$$K^+ = \{x \in]a,1[\ ; \ x \in \cup_{n=0}^{N} A_n\}, \qquad M = \min K^+$$
$$K^- = \{x \in]0,a[\ ; \ x \in \cup_{n=0}^{N} A_n\}, \qquad m = \max K^-.$$

Comme K^+ et K^- sont des sous-ensembles *finis* de $\mathbb{R}$, leur maximum et minimum est bien défini, et l'on a $\delta = \min\{|M-a|, |m-a|\} > 0$ car $m \neq a$ et $M \neq a$.

Par construction, $\forall x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus \{a\}$, on a $x \notin \cup_{n=0}^{N} A_n$ donc $|f(x)| \leq \frac{1}{N} < \epsilon$. Ainsi, $\forall x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus \{a\}$, on a $|f(x) - 0| < \epsilon$, ce qui montre que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.