Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Corrigé 2.2 – jeudi 19 septembre 2024

Exercice 1.

1. Pour $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a d'après l'inégalité triangulaire:

$$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y|$$

donc $|x| - |y| \leq |x-y|$. De même, on a $|y| - |x| \leq |x-y|$. Donc $||x|-|y|| \leq |y-x|$.

2. La direction $\Leftarrow$ de l'équivalence est claire puisque que si $x = 0$, alors $0 < \epsilon$, $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ (par définition de $\mathbb{R}_+^*$). Montrons la direction $\Rightarrow$ par contraposition (on rappelle que si A et B sont deux propositions logiques, alors $(A \Rightarrow B)$ a la même valeur de vérité que $(\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A))$. Si $x \neq 0$ alors $|x| > 0$. En posant $\epsilon = |x|/2 \in \mathbb{R}_+^*$ on a $|x| \geq \epsilon$. Donc $(x \neq 0) \Rightarrow (\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ |x| \geq \epsilon)$. Donc par contraposition, $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, |x| < \epsilon) \Rightarrow (x = 0)$, ce qui conclut la preuve.

Exercice 2.

1. $x_n = -1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$; $x_n = 1 - \exp(-n)$, $n \in \mathbb{N}$ (en utilisant la monotonie de l'exponentielle, que l'on pourra montrer plus tard), ...
2. $x_n = n \cdot (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$; $x_n = \sqrt{n} \cdot \cos(n\pi/4)$, $n \in \mathbb{N}$, ...
3. $x_n = (-1)^n/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, ...

Exercice 3.

1. Montrons que $\left|x_n - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2n^2}$ et pour cela, commençons par montrer l'indication. Pour tout $\delta > 0$, on a :

$$(\sqrt{1+\delta})^2 = 1 + \delta < 1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} = \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^2$$

et donc, en prenant la racine :

$$\sqrt{1+\delta} < 1 + \frac{\delta}{2}.$$

On a alors :

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{n^2+2}}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} - 1\right|$$

et donc, en utilisant l'indication :

$$\left|x_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} - 1\right) < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n^2} - 1\right) = \frac{1}{2n^2}.$$

2. Démonstration de la limite $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$
   Soit $\varepsilon > 0$ donné. En choisissant $N = N(\varepsilon) > \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$, on a par l'étape précédente :

$$\left| x_n - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2N^2} < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

   Ainsi, on conclut que :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} - \frac{U_n}{V_n} = \frac{(U_n + u_{n+1})V_n - (V_n + v_{n+1})U_n}{V_n V_{n+1}} = \frac{u_{n+1}V_n - v_{n+1}U_n}{V_n V_{n+1}}$$

et

$$u_{n+1}V_n - v_{n+1}U_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{n+1}v_k - v_{n+1}u_k) = \sum_{k=0}^{n} v_k v_{n+1}\left(\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_k}{v_k}\right) \geq 0.$$

Exercice 5.

On définit la partie fractionnelle de a comme $\operatorname{mant}(a) = a - \lfloor a \rfloor$ si $a \geq 0$ et comme $-\operatorname{mant}(-a)$ si $a \leq 0$ (on utilisera plus loin la propriété: $|\operatorname{mant}(a)| = \operatorname{mant}(|a|)$). Supposons par l'absurde que pour $k = 1, 2, \ldots, n-1$, on ait:

$$\frac{1}{n} < \operatorname{mant}(ka) < 1 - \frac{1}{n}.$$

(Remarquez qu'il s'agit bien de la négation de la proposition que nous souhaitons démontrer.) Cela signifie que les $n-1$ nombres $\operatorname{mant}(ka)$ sont tous contenus dans un intervalle d'amplitude $\frac{n-2}{n}$. Il existe donc deux indices k_1 et k_2 tels que (*essayez de détailler le raisonnement derrière cette affirmation*):

$$0 \leq \operatorname{mant}(k_1 a) - \operatorname{mant}(k_2 a) \leq \frac{1}{n}.$$

Observons que si $\operatorname{mant}(x) > \operatorname{mant}(y)$ et $x > y > 0$, on a:

$$|\operatorname{mant}(x-y)| = \operatorname{mant}(x-y) = \operatorname{mant}(x) - \operatorname{mant}(y),$$

tandis que si $\operatorname{mant}(x) > \operatorname{mant}(y)$ et $0 < x < y$, on a:

$$|\operatorname{mant}(x-y)| = -\operatorname{mant}(x-y) = 1 + \operatorname{mant}(y) - \operatorname{mant}(x).$$

Ainsi, on en déduit que:

$$0 \leq |\operatorname{mant}((k_1 - k_2)a)| \leq \frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad 1 \geq |\operatorname{mant}((k_1 - k_2)a)| \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Dans les deux cas, $|k_1 - k_2|a$ diffère d'un entier d'au plus $\frac{1}{n}$ (et $|k_1 - k_2| \in \{1, \ldots, n-1\}$), ce qui mène à une contradiction.