Analyse avancée 1
Mathématiques 1$^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Corrigé 2.1 – mardi 17 septembre 2024

Exercice 1.

On a :

1. $\sum_{k=1}^{1011} \frac{1}{(2k)(2(k+1))} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{1011}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{1012}\right) = \frac{1011}{1012}\cdot\frac{1}{4}$.
2. $\sum_{k=0}^{1011} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1011}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2025}\right) = \frac{1012}{2025}$.

Exercice 2.

1. Soient $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$, B majoré. Montrer que $\sup A \leq \sup B$.
   $\sup B$ est un majorant de B et donc de A puisque $A \subset B$. Puisque $\sup A$ est le plus petit majorant de A, on a $\sup A \leq \sup B$.
2. Trouver une suite d'intervalles ouverts $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ telle que :
   (a) $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ est un intervalle ouvert:
   On peut prendre $A_n =]0,1[$ pour tout n ou encore $A_n =]-n,+n[$.
   (b) $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ est un intervalle fermé:
   On peut prendre $A_n =]-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}[$ pour tout n. L'intersection est alors $[-1,1]$.
3. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ une suite d'ensembles bornés.
   (a) Est-ce que $\cap A_n$ est borné?
   Oui car $\cap A_n \subset A_1$ qui est borné.
   (b) Est-ce que $\cup A_n$ est borné?
   En général, non. Il suffit de prendre $A_n =]-n,+n[$.
4. Montrer qu'un ensemble fini A est borné et donner $\sup A$ et $\inf A$.
   On peut décrire A comme $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ où N est le nombre d'éléments de A. On a alors, $|a_i| \leq \max_{1\leq j\leq N} |a_j|, \forall i$, ce qui prouve que A est borné. On a aussi $\sup A = \max_{1\leq j\leq N} a_j$ ainsi que $\inf A = \min_{1\leq j\leq N} a_j$.

Exercice 3.

1. Notons $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor x^{-1} \rfloor$.
   (a) Comme $x \cdot x^{-1} = 1$, on a ($x \geq 1$ ou $x^{-1} \geq 1$) donc ($\lfloor x \rfloor \geq 1$ ou $\lfloor x^{-1} \rfloor \geq 1$), et donc $f(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (b) Par ailleurs $f(3/2) = 1$. Donc l'infimum recherché est 1 (c'est en fait un minimum).

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor &= \sum_{k=1}^{3} 1 + \sum_{k=4}^{8} 2 + \cdots + \sum_{k=(n-1)^2}^{n^2-1} (n-1) + n \\
&= 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + \cdots + (2n-1)(n-1) + n \\
&= \sum_{k=1}^{n} (2k-1)(k-1) + n = 2 \sum_{k=1}^{n} k^2 - 3 \sum_{k=1}^{n} k + 2n \\
&= 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 \frac{n(n+1)}{2} + 2n \\
&= \frac{1}{6} n(4n^2 - 3n + 5).
\end{aligned}$$

Exercice 4.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$.

- Si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x} < \sqrt{y}$; par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{x} < q < \sqrt{y}$, d'où $x < q^2 < y$ et $q^2 \in D$.
- Si $y \leq 0$, alors $\sqrt{-y} < \sqrt{-x}$; il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{-y} < q < \sqrt{-x}$, d'où $x < -q^2 < y$ et $-q^2 \in D$.
- Si $x < 0$ et $y > 0$, on peut prendre $q = 0$.

Exercice 5.

Remarquer d'abord que $cx + d \neq 0$, puisque $(c, d) \in \mathbb{Q}^2$ et $(c, d) \neq (0, 0)$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En notant

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

on déduit $x(cy - a) = b - dy$. Si $cy - a = 0$ alors $0 = b - dy = \frac{bcx - adx}{cx + d}$ et alors $ad - bc = 0$ ce qui contredit les hypothèses. Donc

$$x = \frac{b - dy}{cy - a}.$$

Si $y \in \mathbb{Q}$ alors $x \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit aussi les hypothèses. Donc $y \notin \mathbb{Q}$.