Analyse avancée 1
Mathématiques 1ère année
Prof. Lénaïc Chizat

Corrigé 14.2 – mardi 18 décembre 2024

(Ce corrigé étant long, il n'est pas rédigé avec autant de soin qu'habituellement).

1 Intégration

Exercice 1.

1. $\int_{0+}^{\pi/2} \log(\sin t)\mathrm{d}t$. Converge car pour tout $t \in]0,1]$, $\log(\sin(t)) = \log(\sin(t)/t) + \log(t)$. Le premier terme est fonction prolongeable par continuité sur $[0,1]$ et le second est intégrable en $0+$ (par calcul direct). On peut aussi adopter l'approche plus générique qui consiste à écrire: $\log(\sin t) = \log(t+o(t)) = \log(t)+\log(1+o(1)) = \log(t)+o(1)$ au voisinage de 0. Alors l'intégrale converge par comparaison avec $\log(t)$ qui est intégrable au voisinage de $0+$.
2. $\int_{0+}^{1-} \frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}}\mathrm{d}t$. Puisque $\frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}} = t^{\frac{3}{4}-\alpha}(1+o(1))$ au voisinage de $0+$, on a par comparaison que $\int_{0+}^{1/2} \frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}}\mathrm{d}t$ converge. Puisque $\frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}} = (1-t)^{-1/4}(1+o(1))$ au voisinage de $1-$, on a par comparaison que $\int_{1/2}^{1-} \frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}}\mathrm{d}t$ converge. D'où $\int_{0+}^{1-} \frac{t^\alpha}{\sqrt[4]{t^3(1-t)}}\mathrm{d}t$ converge pour tout $\alpha > 0$.
3. Si $\alpha = 1$. $\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)(\log(\log t))} = [\log(\log(\log(t)))]_3^{+\infty} = +\infty$ diverge. Si $\alpha \neq 1$, $\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)(\log(\log t))^\alpha} = \left[\frac{(\log(\log(t))^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_3^{+\infty}$ qui converge ssi $\alpha > 1$.

Exercice 2.

1. Vérifions que l'intégrale généralisée
$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$
est convergente, mais pas absolument convergente.

   Une intégration par parties donne, pour $x > \pi$,
$$\int_\pi^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_\pi^x \frac{(-\cos t)'}{t}\,dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_\pi^x - \int_\pi^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt.$$
Comme $|t^{-2}\cos t| \leq t^{-2}$ sur $[\pi, +\infty[$ et l'intégrale généralisée
$$\int_\pi^{+\infty} t^{-2}\,dt$$
converge, il en résulte par comparaison que l'intégrale généralisée
$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$
est absolument convergente, et donc convergente. Ainsi
$$\lim_{x\to+\infty} \int_\pi^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$
existe dans $\mathbb{R}$.

2. D'autre part, on obtient aussi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\, dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

La série harmonique étant divergente et $x \mapsto \int_{\pi}^{x} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ étant une fonction croissante sur $[\pi, +\infty[$, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{\pi}^{x} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \lim_{n \to +\infty} \int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty$$

et ainsi que l'intégrale généralisée $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 3.

Vrai. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction uniformément continue telle que f ne converge pas vers 0 en $+\infty$. Montrons alors que f n'est pas intégrable (ce qui est la contraposée de l'énoncé à prouver). Par hypothèse de non-convergence vers 0, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall M > 0$, il existe $x \geq M$ tel que $f(x) \geq \epsilon$. On peut donc construire une suite strictement croissante (x_n) de réels supérieurs à 1 tels que $f(x_n) \geq \epsilon$ et $x_{n+1} > x_n + 2$.

Par uniforme continuité, il existe $0 < \delta < 1$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$, $(|x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq \epsilon/2)$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall u \in [x_n - \delta, x_n + \delta]$ on a $f(u) \geq \epsilon/2$. Il s'ensuit, en minorant l'intégrale de f sur un intervalle par l'aire des rectangles centrés en (x_k) de base 2δ et hauteur $\epsilon/2$ inclus dans cet intervalle, que

$$\int_{0}^{x_n+1} f(t)\mathrm{d}t \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{2}(2\delta) = n\epsilon\delta.$$

Ainsi $x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ n'est pas majorée et, comme il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive, elle diverge donc vers $+\infty$.

Exercice 4.

Par intégration par parties on a

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(x)\sin(x)dx$$

$$= \Big[-\sin^{n-1} x \cos^2 x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \tag{1}$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

et donc $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Mais nous savons que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et que $I_1 = 1$. Donc

$$I_n = \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{pour } n = 2k \\ \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k+1)} & \text{pour } n = 2k+1 \end{cases} \tag{2}$$

Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a que $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$ et donc $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$, c-à-d.

$$\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} < \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$$

ou, également,

$$\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right)^2\frac{2}{2n+1}<\pi<\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right)^2\frac{2}{2n}$$

et donc nous avons la double inégalité

$$\pi<\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right)^2\frac{1}{n}<\pi\frac{2n+1}{2n}.$$

On conclut par le thm. des gendarmes.

Exercice 5.

1. On a que, si $x\in]-1,1[$

   $$\log(1\pm x)=\pm x-\frac{x^2}{2}\pm\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\pm\frac{x^5}{5}\cdots$$

   et donc

   $$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\log(1+x)-\log(1-x)=2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\cdots+\frac{2}{2m+1}x^{2m+1}+\cdots$$

   et si on choisit $x=\frac{1}{2n+1}$ on a que

   $$\log\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{3(2n+1)^3}+\frac{2}{5(2n+1)^5}+\cdots$$

   donc

   $$\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{n+1}{n}\right)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k}}<1+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2k}}=1+\frac{2}{3}\frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}}=1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

   On obtient donc la double inégalité

   $$1\le\left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

   On prend l'exponentielle et divise par e pour obtenir

   $$1\le\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

2. On a que $\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ et donc

   $$1\le\frac{x_n}{x_{n+1}}\le\frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}.$$

   On déduit que (x_n) est une suite positive et décroissante (et donc convergente), tandis que $(e^{-\frac{1}{12n}}x_n)$ est croissante. Puisque $e^{-\frac{1}{12n}}\to 1$, on a que $\lim_n x_n=\lim_n e^{-\frac{1}{12n}}x_n=:L$.
   Puisque $e^{-\frac{1}{12n}}x_n<L<x_n=e^{-\frac{0}{12n}}x_n$, par la continuité de $e^{-\frac{1}{t}}$, il existe $\theta_n\in]0,1[$ t.q. $L=e^{-\frac{\theta_n}{12n}}x_n$, c-à-d. $x_n=e^{\frac{\theta_n}{12n}}L$.

3. Il reste à montrer que $L=\sqrt{2\pi}$. Par l'exercice précédent, on a

   $$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

   Mais nous avons vu que $n!=\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n x_n=\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}L$ et donc on a

   $$\sqrt{\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2^{2n}n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}e^{\frac{\theta_n}{6n}}L^2}{\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}L}=\frac{L}{\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\theta_n}{6n}-\frac{\theta_{2n}}{24n}}=\frac{L}{\sqrt{2}}.$$

2 Une fonction continue partout, dérivable nulle part

1. On observe que $0 \leq D(x) \leq 1/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme la suite $(f_n(x))_n$ est croissante, la convergence vient du fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f_n(x) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} = 1.$$

2. Le fait que la convergence est uniforme suit de l'inégalité suivante

$$|f(x) - f_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} D(d^k x) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k-1} = 2^{-n-1}.$$

3. Comme toutes les fonctions f_n sont continues et périodiques de période 1, et que la convergence est uniforme, on en déduit que f est continue et périodique de période 1. Finalement, on fonction continue et périodique est uniformément continue (à détailler: on utilise ici le fait qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue; et que par périodicité on peut se ramener à un intervalle fermé borné).

4. (a) Remarquons que pour tout $k \geq n$, $2^{k-n} \in \mathbb{N}$ et donc $D(2^{k-n}\ell) = 0$. On a donc:

$$f(a_n) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} D(2^k a_n) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} D(2^{k-n}\ell) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} D(2^k a_n)$$

De même, $f(b_n) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} D(2^k b_n)$.

(b) Soit $c_n := a_n + 2^{-n-1}$ le point se situant au milieu de l'intervalle $[a_n, b_n]$. Lors de la $(n+1)$-ème étape, le segment joignant le point $(a_n, f(a_n))$ au point $(b_n, f(b_n))$ est remplacé par deux segments reliant, respectivement, le point $(a_n, f(a_n))$ au point $(c_n, f(c_n))$ et le point $(c_n, f(c_n))$ au point $(b_n, f(b_n))$. Par construction,

$$f(c_n) = \frac{f(a_n) + f(b_n)}{2} + 2^{-n-1}. \tag{B.3}$$

Il y a, à présent, deux cas à considérer, selon que $x_0 < c_n$ ou $x_0 \geq c_n$.

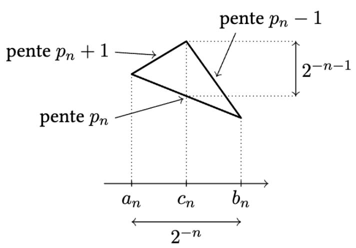

Figure B.3: Le segment de droite reliant les points $(a_n, f(a_n))$ et $(b_n, f(b_n))$ du graphe de la fonction f_n a une pente p_n. Les segments de droite reliant, respectivement, les points $(a_n, f(a_n))$ et $(c_n, f(c_n))$ et les points $(c_n, f(c_n))$ et $(b_n, f(b_n))$ du graphe de la fonction f_{n+1} ont une pente égale, respectivement, à $p_n + 1$ et à $p_n - 1$.

Supposons tout d'abord que $x_0 < c_n$. Dans ce cas, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$. Donc, par (B.3),

$$p_{n+1} = \frac{f(b_{n+1}) - f(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} = \frac{f(c_n) - f(a_n)}{(b_n - a_n)/2} = p_n + 1.$$

Lorsque $x_0 \geq c_n$, on a $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$, ce qui implique que

$$p_{n+1} = \frac{f(b_{n+1}) - f(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} = \frac{f(b_n) - f(c_n)}{(b_n - a_n)/2} = p_n - 1.$$

Ainsi, quel que soit x_0, on a $|p_{n+1} - p_n| = 1$. En particulier,

$$\text{la suite } (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas convergente.} \tag{B.4}$$

(c) Supposons, par l'absurde, que f soit dérivable en x_0. En posant $\lambda_n := (b_n - x_0)/(b_n - a_n) \in [0,1]$, on peut écrire

$$p_n = \lambda_n \frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0} + (1 - \lambda_n) \frac{f(x_0) - f(a_n)}{x_0 - a_n}.$$

Ceci implique que

$$|p_n - f'(x_0)| \leq \lambda_n \left| \frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0} - f'(x_0) \right| + (1 - \lambda_n) \left| \frac{f(x_0) - f(a_n)}{x_0 - a_n} - f'(x_0) \right|.$$

Or, comme on a supposé f dérivable en x_0, le membre de droite tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, ce qui implique que la suite (p_n) converge vers $f'(x_0)$, en contradiction avec (B.4).

3 Quelques révisions

Exercice 1.

On pose

$$a_n = \sup\{\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots\}, \quad b_n = \sup\{\beta_n, \beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \dots\},$$
$$c_n = \sup\{\alpha_n\beta_n, \alpha_{n+1}\beta_{n+1}, \alpha_{n+2}\beta_{n+2}, \dots\}.$$

On a

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad \limsup_{n\to\infty} \beta_n = \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \limsup_{n\to\infty} (\alpha_n\beta_n) = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Par définition de a_n et b_n, on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \alpha_j \leq a_n, \quad \forall j \geq n, \qquad 0 \leq \beta_j \leq b_n, \quad \forall j \geq n.$$

Ainsi, $0 \leq \alpha_j\beta_j \leq a_n b_n$, $\forall j \geq n$ et donc $c_n \leq a_n b_n$. Puisque $(a_n)_{n=0}^\infty$, $(b_n)_{n=0}^\infty$ et $(c_n)_{n=0}^\infty$ sont des suites décroissantes et bornées, on a

$$\lim_{n\to\infty} c_n \leq \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

d'où le résultat.

Exercice 2.

1. On a :

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} \quad \text{et} \quad \tilde{R} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} |\alpha_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

Les suites $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n=0}^\infty$ et $|\alpha_n|^{\frac{1}{n}})_{n=0}^\infty$ sont bornées et non-négatives. En effet, si $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n=0}^\infty$ n'était pas bornée, on aurait $R = 0$.

D'après l'exercice précédent:

$$\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} |\alpha_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \cdot \limsup_{n\to\infty} |\alpha_n|^{\frac{1}{n}}$$

et donc

$$\frac{1}{\tilde{R}} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} |\alpha_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R},$$

ce qui prouve que $\tilde{R} \geq R$.

2. Supposons maintenant que $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n|^{\frac{1}{n}} = 1$. Si $0 < \epsilon < 1$ est donné, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$1 - \epsilon \leq |\alpha_n|^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \epsilon, \ \forall n \geq N.$$

Ainsi

$$(1-\epsilon)|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq |\alpha_n|^{\frac{1}{n}}|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq (1+\epsilon)|a_n|^{\frac{1}{n}}, \ \forall n \geq N.$$

On vérifie que ces deux inégalités impliquent que

$$(1-\epsilon)\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup_{n\to\infty}(|\alpha_n|^{\frac{1}{n}}|a_n|^{\frac{1}{n}}) \leq (1+\epsilon)\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}},$$

et par conséquent:

$$(1-\epsilon)\frac{1}{R} \leq \frac{1}{\tilde{R}} \leq (1+\epsilon)\frac{1}{R},$$

ce qui montre que

$$\frac{R}{1-\epsilon} \geq \tilde{R} \geq \frac{R}{1+\epsilon}.$$

Comme $\epsilon > 0$ est donné quelconque, on obtient $\tilde{R} = R$.

Remarque. On ne peut pas remplacer $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n|^{\frac{1}{n}} = 1$ par $\limsup_{n\to\infty} |\alpha_n|^{\frac{1}{n}} = 1$. En effet, si on prend

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0, & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \qquad \alpha_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 1, & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

on obtient

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tilde{R}} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}|\alpha_n|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Exercice 3.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = x^{1/x}$.
On a, par définition, pour $x > 0$:

$$f(x) = e^{\frac{\log x}{x}}, \qquad \text{et} \qquad f'(x) = e^{\frac{\log x}{x}}\left(\frac{1-\log x}{x^2}\right).$$

1. On a $\frac{\log x}{x} < -\frac{1}{x}$, si $0 < x < 1/e$ et $e^{-1/x} = O(|x|^\alpha)$, si $x \to 0$, $\forall \alpha > 0$ et ainsi,

$$\frac{e^{-1/x}}{x^p} = O(|x|^{\alpha-p}), \text{ si } x \to 0.$$

Donc, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ ainsi que $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$, puisque

$$-\frac{\log x}{x^2} = \frac{\log\frac{1}{x}}{x^2} < \frac{1}{x}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}, \text{ si } x > 0.$$

2. De même, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ puisque $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ et $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.
3. Calculer le maximum de la fonction f. Le seul point stationnaire de f (où la dérivée s'annule) est donné par $1 - \log x = 0$, i.e., $x = e$. C'est le maximum global, puisqu'on a $f'(x) > 0$ pour $0 < x < e$ et $f'(x) < 0$ pour $x > e$. On a

$$f(e) = e^{\frac{1}{e}} > 1.$$

Exercice 4.

Il suffit d'écrire la relation de convexité:

- pour $n - 1 < x < n$ pour obtenir $f(x) \leq x$, et
- pour $x < n < n + 1$ pour obtenir $f(x) \geq x$.