Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Corrigé 14.1 – mardi 17 décembre 2024

Exercice 1.

Si f ou g est constante égale à 0 alors les intégrales convergent et l'inégalité est triviale ($0 \leq 0$). On suppose donc le cas contraire. Alors il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A$, $\int_0^A f(x)^2 \mathrm{d}x > 0$ et $\int_0^A g(x)^2 \mathrm{d}x > 0$ (cf. série 12.1 exercice 2).

Supposons maintenant $f, g \geq 0$. On a, en développant, pour $x \geq A$, que

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_0^x \left(\frac{f(t)}{(\int_0^x f(s)^2 \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}} - \frac{g(t)}{(\int_0^x g(s)^2 \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \mathrm{d}t \\ &= 1 + 1 - 2 \frac{\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t}{(\int_0^x f(s)^2 \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} \cdot (\int_0^x g(s)^2 \mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\int_0^x f(t)g(t)\mathrm{d}t \leq \left(\int_0^x f(s)^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^x g(s)^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^\infty f(s)^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^\infty g(s)^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}}$$

Ceci montre, dans le cas $f, g \geq 0$ que l'intégrale en question converge et que

$$\int_0^\infty f(t)g(t)\mathrm{d}t \leq \left(\int_0^\infty f(s)^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^\infty g(s)^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le cas général, on applique le raisonnement ci-dessus à $|f|$ et $|g|$ et l'on obtient que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)g(t)\mathrm{d}t$ converge absolument et

$$\left| \int_0^\infty f(t)g(t)\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^\infty |f(t)g(t)|\mathrm{d}t \leq \left(\int_0^\infty f(s)^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^\infty g(s)^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 2.

1. On peut écrire $t^{x-1}e^{-t} = t^{x-1}e^{-t/2}e^{-t/2}$ et on sait que $t^{x-1}e^{-t/2}$ converge vers 0 si $t \to +\infty$; il est donc plus petit que 1 pour t assez grand. On a ainsi $t^{x-1}e^{-t} \leq e^{-t/2}$ avec $e^{-t/2}$ intégrable sur $[0, +\infty[$. Par comparaison, on en déduit que $\Gamma(x)$ est bien définie car l'intégrale converge.
2. Calculer $\Gamma(1)$ et montrer ensuite que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\forall \alpha > 1$.
   Indication : intégrer par parties.
   On a
   $$\Gamma(1) = \lim_{N \to \infty} \int_0^N e^{-t}\, dt = \lim_{N \to \infty} \left[-e^{-t} \right]_0^N = 1,$$
   ainsi que, en intégrant par parties :
   $$\int_0^N t^\alpha e^{-t} dt = \left[-t^\alpha e^{-t} \right]_0^N + \alpha \int_0^N t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$
   ce qui donne à la limite $N \to +\infty$,
   $$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$
   On en déduit, par récurrence, que
   $$\Gamma(n + 1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3. Montrer que :
$$\log \Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\log \Gamma(x) + \log \Gamma(y)\right).$$
Indication : utiliser Cauchy-Schwarz.

On a, et puisque tout est positif :
$$\int_0^\infty t^{\frac{x+y}{2}-1} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} t^{\frac{y-1}{2}} e^{-t/2} dt \leq \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt\right)^{1/2}.$$
En prenant le log, on a le résultat. NB: Même si elle semble plus faible a priori, cette propriété implique que la fonction $\log \circ \Gamma$ est convexe (on dit que Γ est log-convexe).

4. Soit
$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt, \quad \text{pour } x, y > 1.$$
Montrer que :
$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y), \quad \text{ainsi que } B(x,y+1) = \frac{y}{x+y} B(x,y).$$
Indication : intégrer par parties.

Montrons la première inégalité par intégration par parties. On a :
$$\begin{aligned}
B(x+1,y) &= \int_0^u t^{(x+1)-1}(1-t)^{y-1} dt \\
&= \lim_{\beta \to 1} \int_0^\beta \underbrace{\left(\frac{t}{1-t}\right)^x}_{u(t)} \underbrace{(1-t)^{x+y-1}}_{v'(t)} dt \\
&= \lim_{\beta \to 1} - \left[\left(\frac{t}{1-t}\right)^x \left(-\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\right)\right]_0^\beta + \int_0^\beta x \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \frac{1}{(1-t)^2} \frac{(1-t)^{x+y}}{x+y} dt \\
&= \frac{x}{x+y} B(x,y).
\end{aligned}$$
Un changement de variable simple $u = 1-t$ montre $B(x,y) = B(y,x)$.

(5.) En déduire que :
$$B(n,m) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$
Indication : par récurrence.

Il suffit de remarquer que le terme de droite et le terme de gauche coïncident pour $(1,1)$ (en effet, $B(1,1) = 1, \Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$) et obéissent aux mêmes règles de récurrence. En effet :
$$B(n+1,m) = \frac{n}{n+m} B(n,m), \quad \text{et}$$
$$\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m)}{\Gamma(n+1+m)} = \frac{n\Gamma(n)\Gamma(m)}{(n+m)\Gamma(n+m)} = \frac{n}{n+m} \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}.$$

Quelques commentaires: On a vu que la fonction Γ satisfait les propriétés suivantes, pour une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

1. $f(1) = 1$
2. $xf(x) = f(x+1)$, $\forall x > 0$
3. $\log f$ est convexe.

Il se trouve que le théorème de Bohr–Mollerup montre que c'est l'unique fonction qui satisfait ces 3 propriétés, ce qui en fait une généralisation de la factorielle très naturelle. On remarquera aussi que la fonction B est l'inverse d'une généralisation des coefficients binomiaux à toutes les paires de réels $x, y > 1$ (mais avec une paramétrisation différente au sens où $\binom{n}{k} = \frac{1}{B(n-k+1,k+1)}$ pour $0 \leq k \leq n$).

Exercice 3.

Soit $x > 0$, on a $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, décroissante et tendant vers 0. D'après le critère des séries alternées, la série converge donc g est bien définie.

Il faut ensuite s'aider d'un dessin pour deviner que la limite cherchée vaut $\frac{1}{2}f(0)$ (ou bien s'en rendre compte sur quelques exemples). Voici ensuite comment le démontrer.

On a

$$\begin{aligned}
g(x) - \frac{1}{2}f(0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \big(f(2kx) - f((2k+1)x)\big) + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt \\
&= -\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2kx}^{(2k+1)x} f'(t)\,dt + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2kx}^{(2k+2)x} f'(t)\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\int_{2kx}^{(2k+1)x} f'(t)\,dt - \int_{(2k+1)x}^{(2k+2)x} f'(t)\,dt\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2kx}^{(2k+1)x} \big(f'(t) - f'(t+x)\big)dt
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\big|g(x) - \frac{1}{2}f(0)\big| &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2kx}^{(2k+1)x} \big|f'(t+x) - f'(t)\big|dt \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{2kx}^{(2k+2)x} \big|f'(t+x) - f'(t)\big|dt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \big|f'(t+x) - f'(t)\big|dt
\end{aligned}$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ suffisamment grand pour que :

$$\int_A^{+\infty} |f'(t)|dt = \int_A^{+\infty} (-f'(t))dt = f(A) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $x > 0$, il en découle que :

$$\int_A^{+\infty} \big|f'(t+x) - f'(t)\big|dt \leq \int_{A+x}^{+\infty} |f'(t)|dt + \int_A^{+\infty} |f'(t)|dt \leq \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Comme f' est continue sur le segment $[0, A+1]$, elle y est uniformément continue. Il existe donc $\alpha \in]0,1]$ tel que :

$$\forall (t,x) \in [0,A]\times]0,\alpha], \quad \big|f'(t+x) - f'(t)\big| \leq \frac{\varepsilon}{3A}.$$

D'où, pour tout $x \in]0,\alpha]$:

$$\begin{aligned}
\big|g(x) - \frac{1}{2}f(0)\big| &= \int_0^A |f'(t+x) - f'(t)|\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} |f'(t+x) - f'(t)|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^A \frac{\varepsilon}{3A}dt + \frac{2\varepsilon}{3} \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

D'où $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}f(0)$.