Analyse avancée 1
Mathématiques 1ère année
Prof. Lénaïc Chizat

Corrigé 13.2 – jeudi 12 septembre 2024

Exercice 1.

1. $L(1) = \int_1^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = 0$ par la définition de l'intégrale sur un segment réduit à un point. Si $0 < x < y$, alors
$$L(y) - L(x) = \int_x^y \frac{\mathrm{d}t}{t} \geq \frac{y-x}{y} > 0$$
donc L est strictement croissante. On peut aussi remarquer que L est dérivable de dérivée $L'(x) = 1/x$, par le thm. fondamental de l'analyse; comme L' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, cela implique que L est strictement croissante (corollaire du TAF). Comme L' est C^∞ sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$ (comme toute fonction rationnelle), on a que L est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. En posant successivement les changements de variable $u = t/x$ puis $v = 1/u$ on a pour $x, y > 0$:
$$\int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{1/x}^{y} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_{1/x}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_1^y \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\int_x^1 \frac{\mathrm{d}v}{v} + \int_1^y \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^x \frac{\mathrm{d}v}{v} + \int_1^y \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$
Ceci montre que $L(xy) = L(x) + L(y)$.

3. On en déduit par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $L(2^n) = nL(2)$. Or on a $L(2) = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} \geq 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Ainsi $L(2^n) \geq n/2$ ce qui montre que L n'est pas majorée sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme de plus L est croissante, ceci implique que $\lim_{x\to+\infty} L(x) = +\infty$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $0 = L(1) = L(x \cdot x^{-1}) = L(x) + L(x^{-1})$, on en déduit que $\lim_{x\to 0+} L(x) = -\lim_{x\to 0^+} L(x^{-1}) = -\infty$.

4. En tant que fonction continue et d'après les limites ci-dessus, L est surjective sur $\mathbb{R}$. Elle est aussi injective car strictement croissante. Donc $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective et admet une réciproque $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ strictement croissante. Par la formule de dérivation d'une réciproque et comme la dérivée de L ne s'annule pas, on a que E est dérivable et pour $y \in \mathbb{R}$, $E'(y) = \frac{1}{L'(E(y))} = E(y)$. On en déduit directement que E est de classe C^∞. Enfin, pour $x, y \in \mathbb{R}$, il existe $u, v \in \mathbb{R}_+^*$ (uniques) tels que $x = L(u)$ et $y = L(v)$. On a alors
$$E(x+y) = E(L(u) + L(v)) = E(L(u \cdot v)) = u \cdot v = E(x) \cdot E(y).$$

Exercice 2.

1. L'intégrande est un polynôme multipliant une exponentielle, on fait donc des intégrations par parties jusqu'à ce que le polynôme soit de degré 1:
$$\begin{aligned}
\int_0^1 (3x^2+1)e^x \mathrm{d}x &= \left[(3x^2+1)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 6xe^x \mathrm{d}x \\
&= 4e - 1 - [6xe^x]_0^1 + \int_0^1 6e^x \mathrm{d}x \\
&= 4e - 1 - 6e + 0 + [6e^x]_0^1 \\
&= 4e - 1 - 6e + 6e - 6 \\
&= 4e - 7.
\end{aligned}$$

2. On pose $x = u^2$ avec $x \in [\pi^2/16, \pi^2/9]$ et $u \in [\pi/4, \pi/3]$. On obtient $dx = 2udu$ et

$$\begin{aligned}\int_{x=\pi^2/16}^{x=\pi^2/9} \cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = 2\int_{u=\pi/4}^{u=\pi/3} u\cos(u)\,\mathrm{d}u \\ &= 2\,[u\sin(u)]_{\pi/4}^{\pi/3} - 2\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin(u)\,\mathrm{d}u \\ &= 2\,[u\sin(u) + \cos(u)]_{\pi/4}^{\pi/3} \\ &= 1 - \sqrt{2} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

3. On décompose $\arctan(t) = 1 \cdot \arctan(t)$ pour intégrer par parties:

$$\begin{aligned}\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t &= [t\,\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t\,\arctan(t) - \frac{1}{2}\log(1+t^2)\right]_0^x = x\,\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2).\end{aligned}$$

4. Posons $x = \sinh(t)$ avec $t \in [0,1]$ et $x \in [0, \sinh(1)]$. On obtient $dx = \cosh(t)dt$ et

$$\int_{x=0}^{x=\sinh(1)} \sqrt{x^2+1}\,dx = \int_{t=0}^{1} \sqrt{\sinh^2(t)+1}\cdot\cosh(t)dt = \int_0^1 \cosh^2(t)dt$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}\,dt = \left[\frac{1}{8}\left(e^{2t} - e^{-2t} + 4t\right)\right]_0^1 = \frac{1}{8}\left(e^2 - e^{-2} + 4\right) = \frac{1}{4}\sinh(2) + \frac{1}{2}.$$

5. Posons $x = \cosh(t)$ avec $t \in [0,1]$ et $x \in [1, \cosh(1)]$.

   Observons que $0 \leq \sinh(t) = \sqrt{\cosh^2(t) - 1}$ si $t \in [0,1]$. On obtient $dx = \sinh(t)dt$ et

$$\int_{x=1}^{x=\cosh(1)} \sqrt{x^2-1}\,dx = \int_{t=0}^{1} \sqrt{\cosh^2(t)-1}\cdot\sinh(t)dt = \int_0^1 \sinh^2(t)dt$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}\,dt = \left[\frac{1}{8}\left(e^{2t} - e^{-2t} - 4t\right)\right]_0^1 = \frac{1}{8}\left(e^2 - e^{-2} - 4\right) = \frac{1}{4}\sinh(2) - \frac{1}{2}.$$

Exercice 3.

Ici, nous ne donnons pas la solution complète (avec le résultat final), mais simplement une aide pour débloquer les calculs.

1.

$$\int_0^{1/2} \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx = \int_0^{1/2}\left(\frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{3}{4(x-1)^2}\right)dx = \left[\frac{-1}{4(x+1)} + \frac{-3}{4(x-1)}\right]_0^{1/2} = \frac{5}{6}.$$

   Remarquons que la décomposition en éléments simples fait intervenir dans ce cas 4 éléments mais il se trouve que 2 parmi ceux-ci $\alpha_1/(x+1)$ et $\alpha_2/(x-1)$ ont des coefficients nuls $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

2.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1}\,dx &= \int_0^1\left(\frac{1-x}{x^2+1} + x\right)dx = \int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} + x\right)dx \\ &= \left[\mathrm{Arctg}(x) - \frac{\log(x^2+1)}{2} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi - 2\log 2 + 2}{4}.\end{aligned}$$

3.
$$\int_0^1 \frac{x^5}{(x+1)(x^3+1)}\,dx = \int_0^1 \left((x-1) + \frac{x^3-x^2+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}\right)\,dx$$
$$= \int_0^1 (x-1)\,dx + \int_0^1 \left(\frac{4}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{x}{3(x^2-x+1)}\right)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}(x-1)^2\right]_0^1 + \left[\frac{4}{3}\log|x+1| + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3\cdot 2}\log|x^2-x+1| - \frac{1}{3\sqrt{3}}\mathrm{Arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$$
$$= \frac{-2+4\log 2 - \pi/(3\sqrt{3})}{3}.$$

Exercice 4.

Ces exercices ont pour objectif de vous montrer que dès qu'on a affaire à des fractions rationnelles, il peut être utile d'essayer la décomposition en éléments simples, qui permet parfois de faire apparaître une structure cachée dans des sommes, des récurrences, etc.

1. On décompose la fraction rationnelle en éléments simples:
$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{X+1-X}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}.$$
(Remarque de rédaction: ces écritures manipulent la fraction rationnelle “formelle” en tant qu'objet algébrique, en non pas en tant que fonction. Il n'est donc pas nécessaire de préciser la nature de la variable X.) On obtient alors une somme téléscopique
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

2. On a
$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1/2}{X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1/2}{X+2},$$
donc
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4}.$$

3. La décomposition en éléments simples donne
$$\frac{1}{4X^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2X-1} - \frac{1}{2X+1}\right).$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right).$$
On obtient une somme télescopique
$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(k+1)-1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1}.$$
Par opérations sur les limites,
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 5.

On pose $(u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ la suite de ces intégrales $u_p = \left(\int_a^b f(x)^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$. Si $M = 0$ alors on a $u_p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ donc le résultat est évident. On suppose donc par la suite que $M > 0$.

En premier lieu, on a par encadrement de la valeur de l'intégrale et par le fait que $s \mapsto s^{1/p}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ que

$$u_p \leq ((b-a)M^p)^{1/p} = M \cdot \exp(\log(b-a)/p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} M.$$

Ainsi, $\limsup_{p\to\infty} u_p \leq M$.

Montrons maintenant que $\liminf_{p\to\infty} u_p \geq M$. Pour cela, fixons $\epsilon \in]0, M[$. Par continuité de f sur $[a, b]$ il existe un point $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = M$. Si $x_0 \neq b$, il existe $\delta > 0$ tel que $x_0 + \delta \leq b$ et $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta]$ on a $f(x) \geq M - \epsilon$ (si $x_0 = b$, on poursuit le raisonnement de façon analogue en remplaçant l'intervalle par $[x_0 - \delta, x_0]$).

Comme f est minorée par la fonction (positive et intégrable) qui vaut $M - \epsilon$ sur $[x_0, x_0 + \delta]$ et 0 partout ailleurs, on obtient l'inégalité suivante (propriété de préservation de l'ordre de l'intégrale):

$$u_p \geq (\delta(M-\epsilon)^p)^{1/p} = (M-\epsilon) \cdot \exp(\log(\delta)/p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} M - \epsilon$$

Comme ceci est vrai pour n'importe quel $\epsilon > 0$, on en déduit que $\liminf_{p\to\infty} u_p \geq M$.

En somme, on a montré $\limsup_{p\to\infty} u_p \leq M \leq \liminf_{p\to\infty} u_p$. Mais pour toute suite bornée on a toujours $\liminf_{p\to\infty} u_p \leq \limsup_{p\to\infty} u_p$. On conclut donc $\liminf_{p\to\infty} u_p = \limsup_{p\to\infty} u_p = M$, ce qui montre que $\lim_{p\to\infty} u_p = M$.

Remarque: On peut rédiger ce même argument sans parler de lim sup/lim inf mais en utilisant le thm. des gendarmes.