Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Corrigé 1.2 – jeudi 12 septembre 2024

Exercice 1.

1.) Montrons que pour tout $n \geq 1$ on a $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. On a, en développant:

$$\begin{aligned}2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k &= (1+2+\cdots+n) + (n+(n-1)+\cdots+1)\\ &= (1+n)+(2+(n-1))+\cdots+(n-1+2)+(n+1) = (n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)\\ &= n(n+1).\end{aligned}$$

2.) Montrons que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Procédons par récurrence.

- Pour $n = 1$, on a simplement :
$$\left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2 = 1 = \sum_{k=1}^{1} k^3.$$
- Supposons à présent que :
$$\left(\sum_{k=1}^{j} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{j} k^3, \forall 1 \leq j \leq n,$$
et montrons que ça reste vrai pour $j = n+1$. On a :
$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 = \left((n+1) + \sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = (n+1)^2 + 2(n+1)\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$
$$= (n+1)^2 + 2(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3.$$

$\square$

Exercice 2.

1. $S = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$: S est majoré par 1 et minoré par 0 et donc borné; on a $\inf S = 0$ et $\sup S = 1$ puisque 0 et 1 appartiennent à S. On a $\max S = 1$ et $\min S = 0$.
2. $S = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$: S est majoré par 1 et minoré par 0 et donc borné; on a $\inf S = 0$ et $\sup S = 1$, et 0 et 1 n'appartiennent pas à S; mais S contient en particulier $\frac{1}{n}$ et $1 - \frac{1}{n}$ pour $n = 2, 3, \ldots$, ce qui montre qu'on ne peut pas trouver de minorant > 0 ni de majorant < 1. S n'admet pas de minimum ni de maximum.
3. $S = \{x_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$: S est borné; on a $\inf S = -1$ et $\sup S = 1$ puisque -1 et $1 \in S$ et $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On a $\min S = -1$ et $\max S = 1$.

4. $S = \{x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$: S est borné; $\sup S = 1$ puisque $1 \in S$ et $x_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (en particulier $\max S = 1$). $\inf S = 0$ car $0 < x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall \epsilon$ tel que $0 < \epsilon < 1$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} = x_n < \epsilon$ car $\mathbb{R}$ est archimédien et donc $x_n \in S$ et $x_n < \epsilon$; ϵ n'est pas un minorant de S. Mais $0 \notin S$ donc S n'a pas de minimum.

5. $S = \{x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$: S est borné; on a $\inf S = -1$ et $\sup S = \frac{1}{2}$, les deux nombres sont dans S. Ce sont donc aussi des minimum et maximum.

6. $S = \{x_n = \frac{1+(-1)^n}{n} - n^2 \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$: On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leq (2/n) - n^2 \leq 2 - n^2$, donc $\{x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas minorée dans $\mathbb{R}$. D'autre part $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $x_n \leq 2 - n^2 \leq 2 - 4 = -2$ et $x_1 = -1$. Donc $\inf S$ n'existe pas et $\sup S = -1 = \max S$.

Exercice 3.

1. E n'est pas vide car $1 \in E$ et majoré par a puisque si $x \in E$ alors $x^n \leq a \leq a^n$. D'après l'axiome de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, E admet une borne supérieure b dans $\mathbb{R}$. Elle satisfait $b \geq 1$ car $1 \in E$.

2. (a) Par la formule du binôme de Newton, on a

$$(b+\alpha)^n - b^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b^{n-k} \alpha^k.$$

Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $b^{n-k}\alpha^k \leq b^{n-1}\alpha$ car $b \geq 1$ et $0 < \alpha < 1$. D'où

$$(b+\alpha)^n - b^n \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \right) b^{n-1}\alpha = (2^n - 1) b^{n-1} \alpha.$$

(b) Comme par hypothèse $b^n < a$, il existe un réel α tel que

$$0 < \alpha < \min \left\{ 1, \frac{a - b^n}{(2^n - 1) b^{n-1}} \right\}$$

et on a alors

$$(b+\alpha)^n \leq b^n + (2^n - 1) b^{n-1} \alpha < b^n + (a - b^n) = a.$$

Alors $b + \alpha \in E$ et $b + \alpha > b$, ce qui contredit la définition de b comme suprémum de E dans $\mathbb{R}$. Ainsi, par l'absurde, on a prouvé que $b^n \geq a$.

3. Par l'absurde, supposons $b^n > a$. Nous allons procéder à une construction similaire pour montrer qu'il existe $\beta \in]0, b[$ tel que $(b - \beta)^n > a$ ce qui mène à une contradiction. Pour $\beta \in]0, b[$ quelconque, par la formule du binôme de Newton:

$$b^n - (b-\beta)^n = b^n - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k b^{n-k} \beta^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} b^{n-k} \beta^k.$$

Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $(-1)^{k+1} b^{n-k} \beta^k = (-1)^{k+1} b^n (\beta/b)^k \leq b^n (\beta/b) = b^{n-1}\beta$ car $b \geq 1$ et $\beta/b \in]0, 1[$. D'où

$$b^n - (b-\beta)^n \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \right) b^{n-1} \beta = (2^n - 1) b^{n-1} \beta.$$

Comme on a supposé $b^n > a$, on peut choisir $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \beta < \min\{b, \frac{b^n - a}{(2^n - 1) b^{n-1}}\}$ et alors on a

$$(b-\beta)^n \geq b^n - (2^n - 1) b^{n-1} \beta > b^n - (b^n - a) = a.$$

Alors $b - \beta$ est un majorant de E, ce qui contredit la définition de b comme suprémum de E dans $\mathbb{R}$. Ainsi, par l'absurde, on a prouvé que $b^n \leq a$.

4. On a montré $b^n \leq a$ et $b^n \geq a$, donc on conclut que $b^n = a$. Le cas $0 < a < 1$ peut -être ramené au cas précédent en considérant $1/a$. Les cas $a = 0$ et $a = 1$ sont d'étude immédiate.

Enfin notons que l'on peut aussi prouver l'unicité; $\{x \in \mathbb{R}_+ \ ; \ x^n = a\}$ admet au plus un élément car, si $x^n = a = y^n$ alors

$$(x - y) \sum_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-1-i} = 0$$

avec $x \geq 0$, $y \geq 0$, d'où $x = y$.