Analyse avancée 1
Mathématiques 1ère année
Prof. Lénaïc Chizat

Corrigé 11.2 – mardi 28 novembre 2024

Exercice 1.

1. Il s'agit d'une forme indéterminée $\frac{\pm\infty}{+\infty}$. Par Bernoulli-L'Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \alpha^{-1} \cdot x^{-\alpha} = 0.$$

2. Il s'agit d'une forme indéterminée $\frac{\pm\infty}{+\infty}$. Réécrivons d'abord l'expression:

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \frac{\exp(x\log(a))}{\exp(\alpha\log(x))} = \exp\big(x(\log(a) - \alpha\log(x)/x)\big).$$

Par le point précédent, $\log(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $x(\log(a) - \alpha\log(x)/x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et comme $\lim_{y\to+\infty}\exp(y) = +\infty$, on obtient, par composition de limites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

3. On se ramène au point 1 par le changement de variable $y = \frac{1}{x}$. On a, comme $\log(x) = -\log(y)$:

$$\lim_{x\to0+} x^\alpha \log(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{-\log(y)}{y^\alpha} = 0.$$

4. On se ramène au point 2 par le changement de variable $y = -x$:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x|x|^\alpha = \lim_{y\to+\infty} \frac{|y|^\alpha}{a^y} = 0.$$

Exercice 2.

En utilisant le résultat sur le produit (dit "de Cauchy") de deux séries (exercice 11.1.2.1), on a

$$\exp(x)\cdot\exp(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right).$$

Par ailleurs, on a grâce à la formule du binôme de Newton:

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}.$$

Les deux expressions étant les mêmes, on a bien montré $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$.

Exercice 3.

1. Montrons que toutes les dérivées de f existent en $x = 0$ et s'annulent.

(a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a en utilisant le changement de variable $y = 1/x$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x^m} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^m}{\exp(y)} = 0$$

(par croissances comparées, ou bien en appliquant m-fois Bernoulli-L'Hôpital).

(b) Montrons maintenant la formule pour la dérivée n-ième par récurrence. Pour $n = 0$ la formule est trivialement vraie, avec le polynôme $p_0(x) = 1$. Supposons que la fonction f est n-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec une dérivée de la forme donnée, et montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$. Par calcul direct, la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$, de dérivée nulle et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée

$$\begin{aligned}
(f^{(n)})'(x) &= \frac{p_n'(x)x^{2n} - 2n \cdot p_n(x)x^{2n-1} + x^{2n}p_n(x)\cdot \frac{1}{x^2}}{(x^{2n})^2} \exp(-1/x) \\
&= \frac{p_n'(x)x^2 + p_n(x)(1-2nx)}{x^{2n+2}} \exp(-1/x) \\
&= \frac{p_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} \exp(-1/x)
\end{aligned}$$

en posant $p_{n+1}(x) = p_n'(x)x^2 + p_n(x)(1-2nx)$. Il reste à vérifier que la fonction est dérivable en 0. À cette fin, calculons la dérivée à droite en 0:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{p_n(x)}{x^{2n+1}} \exp(-1/x) = 0$$

d'après notre calcul en a). Comme la dérivée à gauche en 0 est nulle aussi, cela montre que $f^{(n)}$ est dérivable en 0 de dérivée nulle. En somme, $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'expression de $f^{(n+1)}$ est bien celle donnée ce qui conclut la preuve par récurrence.

(c) On déduit des points précédents, comme $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que la série de Taylor de f en 0 est

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0.$$

Mais $f(x) > 0$ pour tout $x > 0$, donc la fonction f ne coincide pas avec sa série de Taylor en 0 au voisinage de 0. Cette fonction n'est donc pas analytique au voisinage de 0.

2. On peut définir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)}.$$

Comme le dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}$, cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (même régularité que f) et on vérifie qu'elle satisfait bien $g(x) = 0$ pour $x \leq 0$ et $g(x) = 1$ pour $x \geq 1$.

Exercice 4.

1. **Expression de** acosh**:** l'application $\cosh : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est continue, strictement croissante et $\cosh(0) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \cosh(x) = +\infty$. Donc cette fonction admet une fonction réciproque $\operatorname{acosh} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$. Pour tout $(x, y) \in [1, +\infty[\times [0, +\infty[$, on a:

$$y = \operatorname{acosh}(x) \iff \cosh(y) = x \iff x = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \iff e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0.$$

L'équation du second degré $Y^2 - 2xY + 1 = 0$ (d'inconnue $Y \in \mathbb{R}$) admet deux solutions réelles (si $x > 1$) $Y_1 = x - \sqrt{x^2 - 1}$ et $Y_2 = x + \sqrt{x^2 - 1}$. Puisque $y \geq 0$, on a: $e^y \geq 1$. Mais $0 \leq Y_1 \leq 1 \leq Y_2$ car $Y_1 Y_2 = 1$ et $Y_1 + Y_2 = x \geq 0$. On déduit:

$$y = \operatorname{acosh}(x) \iff e^y = Y_2 = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

Ainsi

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad \operatorname{acosh}(x) = \log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Expression de atanh**:** L'application $\tanh : \mathbb{R} \to]-1,1[$ est continue, strictement croissante et $\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1$. Donc cette fonction admet une fonction réciproque $\operatorname{atanh} :]-1,1[\to \mathbb{R}$. Pour tout $(x,y) \in]-1,1[\times\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} y = \operatorname{atanh}(x) \iff x = \tanh(y) \iff x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} &\iff x(e^{2y}+1) = e^{2y} - 1 \\ &\iff e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \iff y = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\forall x \in\,]-1,1[, \quad \operatorname{atanh}(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$$

2. L'ensemble de définition de l'équation est donné par l'intersection des conditions $x \in]-1,1[$, $x \neq 0$ et $\frac{1}{x} \in [1,+\infty[$ ce qui donne $x \in]0,1[$. Alors:

$$\begin{aligned} \operatorname{atanh} x = \operatorname{acosh}\frac{1}{x} &\iff \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \log\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right) \\ &\iff \frac{1+x}{1-x} = \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right)^2 \\ &\iff \frac{1+x}{1-x} = \frac{(1+\sqrt{1-x^2})^2}{x^2} \\ &\iff x^2(1+x) = (1-x)(2-x^2+2\sqrt{1-x^2}) \\ &\iff x^2+x^3 = 2-2x-x^2+x^3+2(1-x)\sqrt{1-x^2} \\ &\iff x^2+x-1 = (1-x)\sqrt{1-x^2} \\ &\iff (x^2+x-1)^2 = (1-x)^2(1-x^2) \text{ et } x^2+x-1 \geq 0. \end{aligned}$$

En développant, on a

$$(x^2+x-1)^2 = (1-x)^2(1-x^2) \iff 2x^4 - x^2 = 0 \iff \left(x^2 = 0 \text{ ou } x^2 = \frac{1}{2}\right) \iff x \in \left\{\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Compte tenu des conditions sur x, on conclut que l'équation proposée admet une unique solution, qui est $1/\sqrt{2}$. (On peut ensuite vérifier en insérant cette valeur dans les expressions logarithmiques de atanh et acosh.)