Analyse avancée 1
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ année
Prof. Lénaïc Chizat

Corrigé 10.1 – mardi 19 novembre 2024

Exercice 1.

Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition. Par application directe de Taylor-Young (et calcul des dérivées successives):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O\left(x^8\right), \quad \text{si } x \to 0,$$

Remarque: le DL à l'ordre 6 demande seulement que le terme de reste soit $o(x^6)$; mais ici on donne une forme plus précise du reste $O(x^8)$ (que l'on obtient en appliquant Taylor-Young au degré 8). On a procédé de même pour les deux autres cas ci-dessous:

$$\cos z = \cos(1) - \sin(1)(z-1) - \frac{\cos(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{\sin(1)}{3!}(z-1)^3 + O\left(|z-1|^4\right), \quad \text{si } z \to 1,$$

$$\log(z) = (z-1) - \frac{1}{2!}(z-1)^2 + O(|z-1|^3), \quad \text{si } z \to 1.$$

ou bien, de manière équivalente:

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2!}x^2 + O(x^3) \quad \text{si } x \to 0.$$

Exercice 2.

Calculons les limites suivantes:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^6}{x^{12}}$: Le développement de Taylor d'ordre 2 de la fonction $\cos(x)$ autour de 0 donne:

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(|x|^2), \quad \text{si } x \to 0$$

   et donc aussi

$$\cos(x^6) = 1 - \frac{1}{2}x^{12} + o(|x|^{12}), \quad \text{si } x \to 0.$$

   On a donc immédiatement $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^6}{x^{12}} = \frac{1}{2}$.

2. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$: On a

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0+} (1+y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0+} e^{\frac{\log(1+y)}{y}}.$$

   Puisque

$$\log(1+y) = y + o(|y|), \quad \text{si } y \to 0$$

   on a donc

$$\frac{\log(1+y)}{y} = 1 + r(y)$$

   avec $\lim_{y\to 0+} r(y) = 0$. Puisque la fonction e^x est continue au point 1, on a

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Exercice 3.

Calculons les limites suivantes par la règle de Bernoulli-L'Hôpital:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^m}{(1-\cos x)^n}$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$, $1 \le m, n \le 2$:

   (a) Pour $m = n = 1$, la fonction est impaire et $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x}{\sin x} = +\infty$. Par imparité, la limite à gauche de 0 vaut $-\infty$ et donc la limite en 0 n'existe pas (car les limites à droite et à gauche diffèrent).

   (b) Pour $m = 1$ et $n = 2$, la fonction est impaire et $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x}{2(1-\cos x)\sin x} = +\infty$. Par imparité, la limite à gauche de 0 vaut $-\infty$ et donc la limite en 0 n'existe pas (car les limites à droite et à gauche diffèrent).

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x}{\sin x} = 2$.

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{(1-\cos x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x}{2(1-\cos x)\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x}{2(1-\cos x)} = +\infty$.

2. Pour $\alpha > 0$:
$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0.$$

3. Pour $\alpha > 0$:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Exercice 4.

Cherchons le développement limité d'ordre m autour de 0 des fonctions suivantes:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \cos(x^2)$ et $m = 4$:
   Le $DL_2(0)$ de $\cos(y)$ s'écrit:
$$\cos(y) = 1 - \frac{1}{2}y^2 + r(y),$$
   où $r(z) = O(|z|^4)$ si $z \to 0$, i.e., il existe $\delta > 0, C > 0$ tels que $|r(z)| \le C|z|^4$, si $|z| \le \delta$.

   Puisque $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, on peut substituer y par x^2 dans le développement ci-dessus pour obtenir
$$\cos(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + r(x^2).$$
   Si $|x| \le \sqrt{\delta}$ alors $|x|^2 \le \delta$ et ainsi $|r(x^2)| \le C|x|^8$.

   Finalement, on obtient $f(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^4 + O(|x|^8)$ si $x \to 0$ (note: un reste en $o(x^4)$ serait suffisant pour répondre à la question; mais ici on donne une propriété plus forte sur le terme de reste, que l'on obtient à peu de frais, donc autant la donner).

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(\cos(x))$ et $m = 6$:
   Si $x = 0$, on a $\cos 0 = 1$. Développons donc $\cos z$ autour de $z = 1$. On obtient
$$\cos z = \cos(1) - \sin(1)(z-1) - \frac{\cos(1)}{2!}(z-1)^2 + \frac{\sin(1)}{3!}(z-1)^3 + O(|z-1|^4), \quad \text{si } z \to 1.$$
   Mais le développement de la fonction cos autour de $x = 0$ donne
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(|x|^8), \quad \text{si } x \to 0.$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\cos(\cos x) &= \cos(1) - \sin(1)\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + O(|x|^8)\right) \\
&\quad - \frac{\cos(1)}{2!}\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6)\right)^2 + \frac{\sin(1)}{3!}\left(-\frac{x^2}{2!} + O(x^4)\right)^3 + O(x^8) \\
&= \cos(1) + \frac{\sin(1)}{2}x^2 + x^4\left(-\frac{\sin(1)}{4!} - \frac{\cos(1)}{2!(2!)^2}\right) + x^6\left(\frac{\sin(1)}{6!} + \frac{2\cos(1)}{(2!)^2 4!} - \frac{\sin(1)}{(2!)^3 3!}\right) + O(x^8) \\
&= \cos(1) + \frac{\sin(1)}{2}x^2 - \left(\frac{\sin(1)}{24} + \frac{\cos(1)}{8}\right)x^4 + \left(\frac{\cos(1)}{48} - \frac{7\sin(1)}{360}\right)x^6 + O(x^8).
\end{aligned}
$$

3. $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \log(\cos(x))$ et $m = 4$:
Puisque $\cos 0 = 1$, on va développer la fonction $\log(z)$ autour de 1. On a

$$\log(z) = (z-1) - \frac{1}{2!}(z-1)^2 + O(|z-1|^3), \quad \text{si } z \to 1,$$

et

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(|x|^6), \quad \text{si } x \to 0.$$

Ainsi

$$\log(\cos x) = \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(|x|^6)\right) - \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2!} + O(|x|^4)\right)^2 + O(|x|^6).$$

Finalement, on obtient

$$\log(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + O(|x|^6), \quad \text{si } x \to 0.$$

4. $f :]-1, +\infty[$ définie par $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$. On utilise la formule de Taylor-Young, en utilisant le fait que les dérivées successives ont pour expression $f^{(n)}(x) = (n!)(1-x)^{-n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On obtient le $DL_2(0)$ suivant:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^3) \quad \text{lorsque } x \to 0.$$

5. $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. En utilisant le DL de cos en 0, on a pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\
&= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5).
\end{aligned}
$$

Exercice 5.

Si on a $\alpha = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$ avec, par exemple $x_i \neq x_j$, alors on définit une nouvelle configuration $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ avec $x'_k = x_k$ pour tout k sauf $x'_i = x'_j = \frac{x_i + x_j}{2}$. Alors, par la concavité stricte, on a $f(x_i) + f(x_j) < 2f((x_i + x_j)/2)$ et donc $\beta = f(x'_1) + f(x'_2) + \cdots + f(x'_n) > \alpha$. Notons qu'on a $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n$. On en conclut qu'il n'y a pas de configuration maximale avec deux x_i différents.

Ainsi une configuration maximale est de la forme $(c, \ldots, c)$ avec $c \in [0, x/n]$ et la valeur correspondante est $f(x_1) + \cdots + f(x_n) = nf(c)$. Comme la fonction f est supposée strictement croissante, la solution optimale est obtenue avec $c = \frac{x}{n}$.