Analyse avancée 1
Mathématiques 1ère année
Prof. Lénaïc Chizat

Série 1.1 – mardi 10 septembre 2024

Exercice 1. *(Objectif: savoir adapter la preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$)*

Démontrer qu'il n'existe pas de fraction (=nombre rationnel) x telle que $x^2 = 2/3$.

(À méditer: avec cette technique de preuve, quels sont les nombres dont on peut montrer que la racine est irrationnelle?)

Exercice 2. *(Objectif: réaliser l'importance de bien articuler et rédiger un raisonnement)*

Dans le but de résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, un étudiant a rédigé le raisonnement suivant. Détailler soigneusement ce qui est correct et ce qui ne l'est pas dans ce raisonnement.

D'une part, écrivons $x = -1 - x^2$. D'autre part, si l'on divise l'équation de départ par x, on trouve $x + 1 + \frac{1}{x} = 0$ et donc $x = -1 - \frac{1}{x}$. En comparant les deux expressions obtenues pour x, il suit que $x^2 = \frac{1}{x}$. Nous déduisons $x^3 = 1$ et donc $x = 1$.

Exercice 3. *(Objectif: se rappeler de quelques techniques de manipulation des sommes)*

Calculer la somme

$$S = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + 2024 \cdot 2^{2024}.$$

En fait, S vaut exactement
779358187702443215481593555702916536521654363880567839109893903730897633384820738755916815465818094456699805676281448524434612609880484740440408376190482100880578338075279177351124883282640769625287349253308399803923972348141905864660721598228660736822923058970802367946643424374909116397059899609419240592847260194388616761172362613597156096554923583501161927264826307878812146041979971117090858618786696280677126769095043390207546524776294585044487479586254835948615971328854433110642347536010528414000984330662113427193141609118915989936709492344925781843718375205772203090160838153574683616108459137143773593 8
mais vous trouverez une expression plus intelligible.

Indications:

1. Montrer que $S = \sum_{n=1}^{2024} (n-1)2^n + \sum_{n=1}^{2024} 2^n$.
2. Montrer que $S = 2S - 2 \cdot 2024 \cdot 2^{2024} + \sum_{n=1}^{2024} 2^n$.
3. Utiliser la relation $(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}$.

Exercice 4. *(Objectif: manipuler les axiomes des réels. Il faut s'imaginer être comme un programme informatique qui ne connait absolument rien de $\mathbb{R}$ sinon les axiomes...)*

En utilisant les axiomes caractérisant les nombres réels et en indiquant à chaque étape quel axiome a été utilisé, montrer que:

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \cdot 0 = 0$ (*indication: commencez par écrire $0 = 0 + 0$ en utilisant l'axiome 1.3*)
2. Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $z \geq 0$ alors $zx \leq zy$.

Vous voyez comme c'est fastidieux... C'est pourquoi nous n'allons pas re-prouver ce genre de propriétés simples des nombres réels que vous connaissez déjà.