



Analyse avancée I

Numéro :	NOM, PRÉNOM :
	Signature :

Consignes :

Ne pas ouvrir l'examen avant le signal de départ.

Ecrivez dans le cadre (pour le scanner) ; ne dégrafez pas les feuilles. Vous pouvez utiliser les pages en recto-verso.

Indiquez clairement où est votre solution par opposition au brouillon, par exemple en biffant votre brouillon après coup ou en notant "brouillon".

Posez votre carte camipro sur la table. Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé, si sur vous, ni à votre table de travail.

Au signal de fin (12h45), votre copie doit être refermée devant vous et laissée sur votre table.

Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 4	Ex. 5	Ex. 6	Total

Exercice 1. Considérons une suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.

- (i) Donner la définition précise des deux énoncés « la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge » et « la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ converge vers 0 ».
- (ii) Prouver à partir des définitions (sans utiliser de résultat du cours) que le premier implique le deuxième.

Exercice 2. On définit la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ par récurrence en posant $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_n = \sqrt{x_{n-1} + 4x_{n-2}}$ quand $n \geq 2$. Démontrer que la suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 3. Calculer les expressions ci-dessous.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n-1)} \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{3^n}} \quad (iii) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 7n + 10} \quad (iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log(\cos x) + \sin^2(x)}{x^4}$$

Exercice 4. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que (i) $\forall x \geq 1 : f(x) = 1$ et (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.
Démontrer que f admet un minimum global sur \mathbf{R} .

Exercice 5. Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. Prouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 6. Calculer les intégrales (i) à (iii) et une primitive de f pour (iv).

$$(i) \int_0^2 \sin(\sqrt{x}) dx \quad (ii) \int_0^1 e^{-x} \cos(2\pi x) dx \quad (iii) \int_1^e \frac{\log \sqrt{x}}{x^3} dx \quad (iv) f(x) = \frac{x^3}{x^3 - 1}$$

