EPFL

Examen : MATH-100(a) Analyse avancée
Section :
Enseignant(s) : Lénaïc Chizat
Date : 15.01.2025,

214

Nom : X-1

Salle :

0	9	9	9	9	9	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8
9	X	X	X	X	X	9
X	0	0	0	0	0	X

Signature : ______________________

Durée de l'examen: 3 h 30 .

Les documents, formulaires et calculatrices ne sont pas autorisés.

En cas de manque de place, utiliser les dernières feuilles du livret et indiquer le renvoi de page. En dernier recours, vous pouvez ajouter des feuilles libres (dans ce cas, indiquer votre nom et indiquer les renvois sur le livret).

Continuité uniforme, convergence uniforme

1a Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f.

1b Dans ce même contexte, donner un contre-exemple à la convergence uniforme si l'on suppose seulement que f est continue mais pas uniformément continue.

Une famille d'intégrales

2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale généralisée $I_n = \int_0^1 \log(t)^n \mathrm{d}t$. Montrer que I_n est absolument convergente et donner (en la démontrant) sa valeur pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

↳

Séries

3a Soient p et q deux réels tels que $1 \leq p < q$. Montrer que si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^p \text{ converge } \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^q \text{ converge .}$$

3b Pour $1 \leq p < q$ donnés, donner un exemple de suite $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^q$ converge mais $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^p$ diverge.

Une propriété des intégrales

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

4a Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^b f(t)\mathrm{d}t$.

4b Donner, en justifiant, un exemple qui montre qu'on ne peut pas toujours trouver un tel point x_0 dans l'intervalle *ouvert* $]a, b[$.

Continuité

5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe. (On rappelle qu'un point fixe de f est une solution de l'équation $f(x) = x$).

Série entière

6 Donner le rayon de convergence $R > 0$ de la série entière $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^n}{n-1} x^{2n+1}$ et déterminer sa somme pour $x \in]-R, R[$.

Dérivée

7 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définies respectivement par $a_k = f(\log(2k))$ et $b_k = f(\log(2k+1))$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ satisfont $\lim_{k\to\infty} a_k = -1$ et $\lim_{k\to\infty} b_k = 1$. Montrer que f' n'est pas bornée.

Convergence et somme de série

8 Déterminer tous les triplets de réels (a, b, c) tels que la série $\sum_{n=2}^{+\infty} x_n$ de terme général $x_n = a\sqrt{n} + b\sqrt{n-1} + c\sqrt{n-2}$ converge. Lorsqu'elle converge, calculer sa somme.

Sous-suites

9 Soit (u_n) une suite réelle telle que $(u_{n+1} - u_n)$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle. (Rappel de cours: on dit qu'un réel ℓ est une valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers ℓ. On rappelle aussi que l'ensemble vide, ou un singleton, sont des intervalles.)