



ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

# Eléments de Géomatique

Polycopié 2 : Géodésie

Pierre-Yves Gilliéron  
Audrey Ueberschlag  
Geoffrey Vincent

Faculté de l'Environnement Naturel, Architectural et Construit  
Institut d'Ingénierie de l'Environnement  
Géomatique - Topométrie

Lausanne, édition Février 2014

# SOMMAIRE

<b>1. GÉODÉSIE</b>	<b>3</b>
<b>1.1. BASES ET DÉFINITIONS</b>	<b>3</b>
1.1.1. FORME DE LA TERRE	3
1.1.2. GÉODÉSIE GÉOMÉTRIQUE	4
1.1.3. GÉODÉSIE SPATIALE	7
1.1.4. GÉODÉSIE PHYSIQUE – GÉOÏDE	9
1.1.5. ALTITUDES	12
<b>1.2. RÉFÉRENCES GÉODÉSIQUES</b>	<b>14</b>
1.2.1. SURFACE DE NIVEAU, GÉOÏDE ET ELLIPSOÏDE	14
1.2.2. SURFACES DE RÉFÉRENCE	15
1.2.3. COORDONNÉES TERRESTRES	17
1.2.4. ELLIPSOÏDE ET CHANGEMENT DE SYSTÈME	20
1.2.5. AZIMUT, AZIMUT MAGNÉTIQUE	23
1.2.6. SYSTÈMES D'ALTITUDES	25
<b>2. SYSTÈMES DE PROJECTION</b>	<b>27</b>
<b>2.1. DÉFINITIONS</b>	<b>27</b>
<b>2.2. TYPES DE PROJECTION</b>	<b>29</b>
2.2.1. PROJECTIONS CONIQUES	29
2.2.2. PROJECTIONS AZIMUTALES	32
2.2.3. PROJECTIONS CYLINDRIQUES	32
<b>2.3. PROJECTION SUISSE</b>	<b>36</b>
2.3.1. DÉFINITION	36
2.3.2. COORDONNÉES RECTANGULAIRES PLANES	38
2.3.3. CONVERGENCE DU MÉRIDIEN	39
2.3.4. CONVERSION DE COORDONNÉES PLANES ET GÉOGRAPHIQUES	40
2.3.5. CONVERSION DE Y, X EN L, B	41
2.3.6. CONVERSION DE L, B EN Y, X	41
2.3.7. CALCUL DE LA CONVERGENCE DU MÉRIDIEN	41
2.3.8. DÉFORMATION LINÉAIRE	42
2.3.9. EXEMPLE	43
<b>3. RÉFÉRENCES</b>	<b>46</b>
<b>4. TABLE DES FIGURES</b>	<b>47</b>

## Avertissement

*La plupart des figures de ce polycopié ont été créées à l'EPFL. Toutefois, les auteurs ont utilisé un certain nombre de ressources dont les références sont citées. Si l'une ou l'autre de ces ressources ne sont pas référencées correctement ou font l'objet d'un droit d'usage particulier, nous vous prions de bien vouloir le signaler à l'auteur.*

*Toute utilisation de ce support de cours doit se faire avec le consentement de l'auteur.*

# 1. Géodésie

## 1.1. Bases et définitions

### 1.1.1. Forme de la Terre

Les mensurations et la cartographie sont des éléments de base indispensables à tout aménagement et développement d'un territoire. Sans les relevés du terrain, sans les cartes et les plans établis par les spécialistes, il est impossible de projeter puis de construire les voies de communication et les grands ouvrages de génie civil ; impossible également de planifier puis de réaliser la mise en valeur et l'équipement des zones agricoles, forestières, touristiques ou urbaines. Le pilote d'avion, l'automobiliste, le promeneur ou l'alpiniste utilisent des cartes pour la préparation de leurs voyages ou de leurs excursions. Les armées ont également besoin d'un matériel cartographique important. Les cartes sont aussi les documents de base pour diverses études en géographie, géologie, climatologie, agriculture, foresterie et histoire. C'est enfin grâce aux cartes topographiques que nous pouvons acquérir une image synthétique globale des caractéristiques variées d'un pays.

Toutefois, avant de procéder aux relevés des détails d'une région pour établir des plans et des cartes, il y a lieu d'effectuer certains travaux préliminaires pour déterminer un système de coordonnées lié à la Terre ainsi que la position et l'altitude de repères qui serviront de points de référence pour les travaux topographiques et cartographiques : c'est la tâche de la géodésie.

*Dérivé du grec, le terme géodésie désigne la science qui a pour objet l'étude géométrique de la Terre.*

Cette définition très simple cache en réalité toute une série de problèmes dont la complexité s'est accrue au cours des siècles, avec le développement de nos connaissances. Evidemment, les progrès des sciences et des techniques ont aussi fourni aux géodésiens des outils de plus en plus performants pour les aider dans leurs travaux.

Par étude géométrique de la Terre, il faut comprendre la recherche de la forme générale et des dimensions de notre planète. En fait, chacun sait que la Terre est ronde. Mais combien ignorent ou ont tout simplement oublié que la **circonférence terrestre** mesure environ 40'000 km et que son **rayon** vaut approximativement 6'400 km ? Pourtant, dès nos premières leçons de géographie, nous avons tous appris que la Terre a la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati, que l'**aplatissement terrestre** (sans en connaître la définition) est de l'ordre de 1/300 et que la différence entre les **rayons polaires** et **équatoriaux** vaut environ 22 km. Actuellement, on définit l'aplatissement terrestre comme étant le rapport entre la différence des deux axes de l'ellipse.

Il est indispensable de préciser que toutes ces notions concernant notre planète permettent de relativiser l'amplitude des irrégularités du relief terrestre : malgré ses hautes chaînes de montagnes, ses vallées profondes et même ses fosses océaniques, le relief de la surface de la Terre est presque insignifiant. Selon une comparaison souvent utilisée, il est beaucoup moins important que les rugosités de la peau d'une orange.

En effet, les points les plus élevés ou les plus bas par rapport au niveau des mers ne sont qu'à  $\pm 10$  km (Mont-Everest : + 8'882 m, Fosse des Mariannes : - 10'860 m). En réduisant le rayon terrestre à 6 cm (la dimension d'une belle orange), il ne resterait plus que, par rapport à une surface parfaitement lisse, de minuscules aspérités ou de petites dépressions dont la hauteur ou la profondeur mesurerait au plus 0,1 mm. Et sur ce modèle réduit de la Terre, la différence entre le plus grand diamètre et le plus petit ne serait que de 0,4 mm. Toutes ces valeurs seraient imperceptibles au simple coup d'œil et seulement mesurables avec un outil de haute précision.

### 1.1.2. Géodésie géométrique

La **géodésie géométrique** combine les observations par rapport à des objets extérieurs à la Terre (étoiles, Soleil, Lune, puis, récemment, satellites artificiels) et les mesures entre des repères terrestres (déterminations de longueurs d'arcs de méridiens ou de parallèles), qui constituent depuis plus de 2'000 ans les informations essentielles pour la recherche de la forme et des dimensions de notre planète.

L'hypothèse de la sphéricité de la Terre date de Pythagore, au IV<sup>ème</sup> siècle avant notre ère, et l'on attribue à l'astronome égyptien Eratosthène la première évaluation de ses dimensions, vers 250 avant J.-C. Eratosthène savait que, le jour du solstice d'été, à midi, le soleil était à la verticale de Syène (aujourd'hui Assouan), puisqu'il se reflétait sur l'eau au fond des puits. Il mesura à Alexandrie, le même jour, à la même heure, la longueur de l'ombre portée par un obélisque et en déduisit l'angle entre les verticales des deux villes : 7.2° ou 1/50 de circonférence (Figure 3-1). Il obtint la distance de 5'000 stades entre Syène et Alexandrie, à partir des premiers travaux d'arpentage de la vallée du Nil. Un calcul simple lui permit alors d'estimer la longueur de la circonférence terrestre à 250'000 stades, soit approximativement 40'000 km.

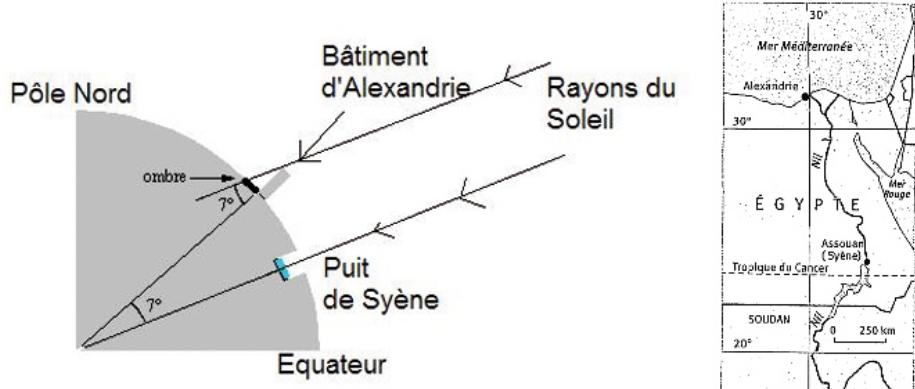


Figure 1-1 : Première détermination du rayon terrestre par Eratosthène 250 ans avant J.C.

Bien sûr, les deux villes ne sont, d'une part, pas sur le même méridien (la différence de leur longitude est de près de  $3^\circ$ ) ; d'autre part, la valeur admise pour le stade, en mesures actuelles, est douteuse, de sorte que l'exactitude du résultat peut à bon droit passer pour non prouvée. Quoi qu'il en soit, la méthode était trouvée et elle fut reprise et perfectionnée au cours des siècles en différentes régions.

L'idée d'une Terre sphérique est admise jusqu'à la fin du XVII<sup>ème</sup> siècle, date à laquelle Huyghens, puis Newton, affirment que la Terre a la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati selon la ligne des pôles.

Au début du XVIII<sup>ème</sup> siècle, l'hypothèse de Newton est mise en doute à la suite de mesures effectuées en France. Pour trancher le débat, l'Académie des Sciences de Paris décide d'envoyer deux expéditions simultanées pour mesurer deux arcs de méridien, l'un en Laponie, aussi près que possible d'un pôle, où la courbure de la Terre est minimale, l'autre au Pérou, au voisinage de l'équateur, où la courbure du méridien est la plus marquée.

Après plusieurs années de travail et de multiples péripéties, les résultats acquis par les deux expéditions confirment la théorie de Newton et servent de base au premier calcul d'un ellipsoïde de référence, dont les paramètres seront publiés par Delambre en 1799.

Au cours du XIX<sup>ème</sup> siècle, des arcs nombreux et souvent très étendus sont mesurés sur les cinq continents ; il en résulte toute une série d'ellipsoïdes terrestres proposés par des mathématiciens ou des géodésiens très célèbres.

Toutes les démarches décrites ci-dessus utilisent la **méthode des arcs**, méthode qui consiste à mesurer la longueur d'un arc de méridien ou de parallèle, ainsi que son amplitude, à partir d'observations astronomiques. Si le principe est simple, la mise en œuvre pratique est délicate. Il faut en effet mesurer des arcs longs de plusieurs centaines de kilomètres pour que leurs amplitudes soient suffisamment grandes. La circonférence terrestre mesurant environ 40'000 km, l'amplitude d'un arc de grand cercle de 100 km est égale à 1 grade, c'est-à-dire  $1/400$  de la circonférence : c'est évidemment trop peu pour en déduire des caractéristiques de surface.

Il est d'autre part impossible de mesurer directement une longueur de plusieurs centaines de kilomètres entre des repères terrestres, ne serait-ce qu'à cause de la visibilité. On y parvient indirectement en implantant entre les deux extrémités de l'arc un ensemble de repères auxiliaires formant une chaîne de grands triangles juxtaposés (Figure 3-2). Par une simple mesure de longueurs et d'angles, on peut obtenir les coordonnées de tous les sommets des triangles et finalement la longueur totale de l'arc.

Au début du XX<sup>ème</sup> siècle, le géodésien américain Hayford préconise la **méthode des aires**. Selon lui, plutôt que de mesurer la longueur des arcs et de leurs amplitudes, il est préférable de comparer les coordonnées géographiques, obtenues par observations astronomiques directes, avec les coordonnées des mêmes points, calculées à partir de mesures terrestres sur une surface de référence choisie a priori. Les paramètres de la surface de référence sont ensuite modifiés jusqu'à ce que les différences respectives entre les coordonnées astronomiques et les coordonnées géodésiques, différences appelées **déviations de la verticale**, deviennent minimales. La démarche de Hayford, appliquée d'abord à quelque 270 points de triangulation répartis sur le continent nord-américain, donna les paramètres du premier ellipsoïde international admis comme surface de référence en 1924.

La méthode des aires s'apparente à une discipline particulière de l'astronomie, appelée **astronomie de position**, dans laquelle les coordonnées d'un lieu de la Terre sont déterminées à partir d'observations des étoiles.

L'application de ce principe à la navigation en mer est bien connue. Chacun sait en effet que les navigateurs sont capables de calculer la position de leur bateau, de "faire le point" selon l'expression consacrée, à partir d'angles verticaux, mesurés avec un sextant par rapport au Soleil ou aux autres étoiles, et de l'heure des observations.

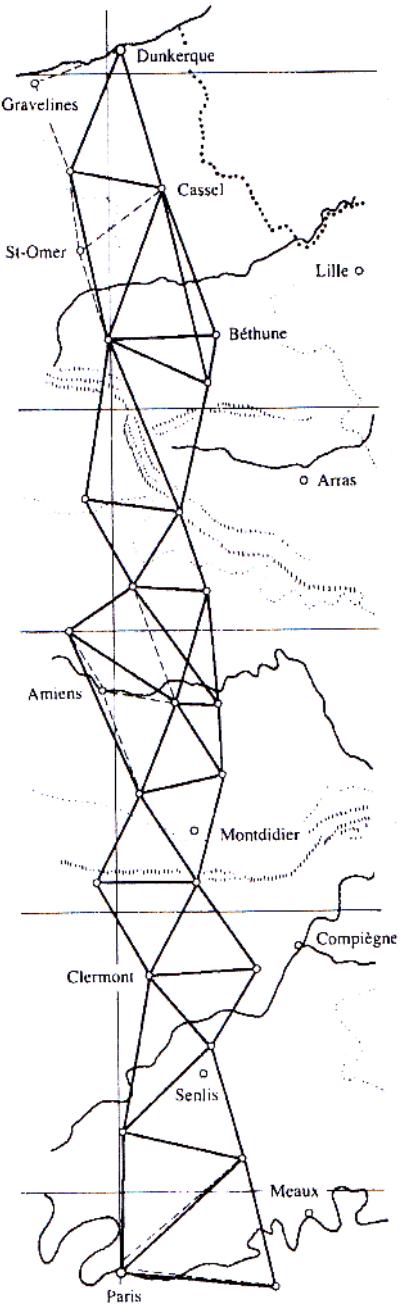


Figure 1-2 : Chaîne de triangles

Les géodésiens utilisent également des variantes perfectionnées de ces méthodes et, à partir d'observations astronomiques seulement, ils peuvent déterminer des coordonnées dont les valeurs sont indépendantes de toute hypothèse sur la forme et les dimensions de la Terre. Il n'y aurait donc pas de différence entre les déterminations astronomiques et géodésiques si la surface de référence choisie pour le calcul des mesures terrestres correspondait exactement à celle de la Terre. Ce thème sera développé dans le chapitre 3.2.

### 1.1.3. Géodésie spatiale

Depuis Spoutnik en 1957, les satellites artificiels gravitant autour de la Terre ont offert aux géodésiens des possibilités de mesure totalement nouvelles. Avec le développement de la technologie et des ordinateurs, ils ont donné naissance à la **géodésie spatiale**.

Si la Terre était une sphère parfaite avec une densité répartie symétriquement par rapport à son centre, l'orbite d'un satellite artificiel serait décrite exactement par les lois de Képler, bien connues en mécanique céleste. L'orbite réelle du satellite est donc perturbée par plusieurs facteurs, dont les principaux sont le **renflement équatorial** et les **anomalies du champ de la pesanteur terrestre**, auxquels il faut ajouter l'attraction de la Lune et du Soleil, la résistance atmosphérique et la pression de radiation solaire. A cause de toutes ces perturbations, l'orbite n'est pas fixe dans l'espace ; ses paramètres varient et la description du mouvement exige des modèles mathématiques très élaborés. L'évolution des paramètres de l'orbite livre en revanche des renseignements sur les principales sources de perturbations du mouvement et permet ainsi l'étude de la forme du géoïde. Plusieurs types de mesures sont effectués en géodésie spatiale ; tous reviennent à évaluer une grandeur qui dépend de la position relative du satellite et du lieu d'observation.

La **mesure de directions**, selon le principe de la triangulation spatiale, est la méthode la plus ancienne ; elle a été utilisée au cours des années 1960 et consistait à photographier, au moyen de caméras spéciales, le satellite sur un fond d'étoiles. Les positions respectives de ces étoiles déterminaient des directions de l'espace connues grâce aux catalogues astronomiques. Ces directions servaient de référence et permettaient de calculer les directions correspondant aux positions successives du satellite, puis les segments entre les stations de prise des photos et enfin les coordonnées de ces stations (Figure 3-3).

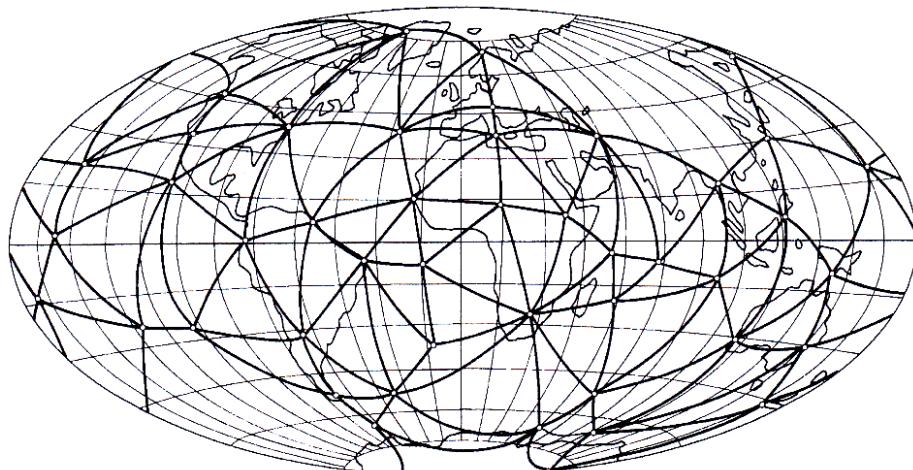


Figure 1-3 : Premier réseau géodésique mondial obtenu par triangulation spatiale

Le **principe de la trilateration spatiale** consiste à mesurer les distances stations-satellites en utilisant un **canon à laser**. Un appareil pointé sur le satellite émet une brève impulsion laser et déclenche simultanément un compteur électronique. Le satellite, garni de prismes-rélecteurs, renvoie l'impulsion vers l'émetteur et la distance est calculée à partir de la mesure du temps de parcours aller-retour. Les premiers équipements permettaient d'obtenir la distance station-satellite avec une précision de quelques mètres. Les appareils les plus récents ont une dispersion réduite à quelques centimètres.

Les satellites utilisés dans la triangulation et la trilateration spatiale gravitent autour de la Terre à des altitudes comprises entre 1000 et 5000 km. Pour obtenir une bonne configuration du réseau des repères, il faut que les distances entre les stations d'observation soient du même ordre de grandeur.

L'une des premières techniques de positionnement par satellite utilise l'**effet Doppler**. Un satellite dont la position est connue à chaque instant émet une onde radioélectrique de fréquence constante. Captée en une station au sol, la fréquence de l'onde reçue est modifiée à cause du mouvement du satellite. En exploitant l'effet Doppler mesuré à différents instants, on peut calculer la position du récepteur dans un système de coordonnées géocentriques. Cette méthode a été mise en œuvre pour la

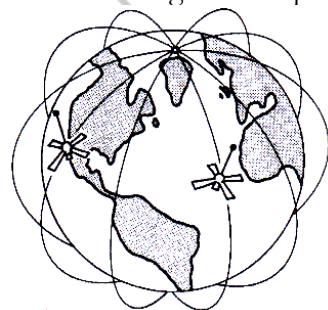


Figure 1-4 : Orbites polaires des cinq satellites du système de TRANSIT

première fois en 1964 avec la création du réseau **TRANSIT** pour la marine américaine. Ce système de positionnement, qui devint accessible aux tâches non militaires dès 1967, était constitué d'un ensemble de cinq satellites, placés en **orbites polaires** (passant par la verticale des pôles) quasi circulaires, à une altitude d'environ 1'075 km (Figure 3-4).

Le système est hors service depuis 1996.

Les orbites sont réparties en longitude et la durée approximative de révolution d'un satellite est de 107 min. Cette disposition permet à un

observateur situé en un lieu quelconque de la Terre d'enregistrer au moins dix passages de satellite par jour.

L'enregistrement des signaux émis durant un seul passage d'un satellite permettait d'obtenir la position du récepteur avec une précision de quelques dizaines de mètres. En poursuivant avec plusieurs récepteurs de haute qualité et durant plusieurs jours l'enregistrement des signaux émis lors des passages des satellites, on a réussi à déterminer la position relative des récepteurs à quelques décimètres près. D'une part, pour les besoins géodésiques, cette technique est aujourd'hui largement dépassée. D'autre part, ce système a été remplacé par d'autres systèmes de localisation par satellites (cf. chapitre 9).

### 1.1.4. Géodésie physique – géoïde

Les méthodes géodésiques décrites jusqu'à présent sont purement géométriques. Si l'on considère maintenant les satellites non plus uniquement comme des points géométriques auxiliaires, mais comme des corps pesants se mouvant dans le champ d'attraction terrestre, l'analyse des perturbations de leurs trajectoires et le traitement des mesures permettent d'obtenir non seulement les coordonnées des stations d'observation, mais aussi le champ de la pesanteur, donc la forme géométrique des surfaces de niveau (ou équipotentielles) de ce champ et par là-même la forme de la Terre.

En 1743, le mathématicien français Clairaut publie sa **Théorie de la figure de la Terre** où il établit la relation entre les axes d'un ellipsoïde, la latitude d'un lieu et l'intensité de la pesanteur en ce lieu. Cette étude est la base de la **géodésie dynamique**.

Au XIX<sup>ème</sup> siècle, les **mesures gravimétriques** (du champ de la pesanteur) se multiplient et leur précision s'améliore notablement. Au début du XX<sup>ème</sup> siècle, la concordance entre les valeurs des paramètres terrestres déduites des calculs géométriques et celles qui résultent des mesures gravimétriques était déjà excellente. Cependant, il subsistait certaines divergences difficiles à expliquer par la seule imprécision des mesures.

L'origine de ces dispersions réside dans les anomalies de la pesanteur et les déviations de la verticale. Toutes ces imperfections proviennent de la répartition irrégulière des masses et de leur densité sur la surface et à l'intérieur de l'écorce terrestre.

Ces difficultés ont rendu nécessaire l'introduction d'un modèle plus élaboré pour la forme de la Terre : le **géoïde**. Ce nouveau terme désigne, en simplifiant, la forme générale de la Terre, représentée par la surface moyenne des océans et son prolongement estimé sous les continents.

Physiquement, le géoïde est une surface de niveau du champ de la pesanteur (Figure 3-5) ; il est donc partout perpendiculaire à la verticale. Mais cette définition fait naître un certain nombre de complications : le géoïde ne peut

pas être décrit par une expression mathématique simple, car sa forme géométrique est irrégulière. En outre, et paradoxalement, la plupart des observations destinées à déterminer le géoïde sont effectuées sur la terre ferme, c'est-à-dire là où le géoïde est inaccessible. Il faut donc faire une distinction entre la détermination de la **position**, à partir d'un ellipsoïde de référence, et la détermination de l'**altitude** (différence de hauteur par rapport au géoïde), à partir des mesures gravimétriques et des nivelllements.

Le principe de la méthode dynamique est assez complexe et peut être résumé comme suit : avec un très grand nombre d'observations diverses, effectuées en des stations bien réparties sur l'ensemble de la Terre et concernant plusieurs satellites, on peut établir un système d'équations dans lesquelles interviennent notamment les mesures, les lois de la mécanique céleste et les modèles mathématiques décrivant les perturbations des orbites. Il est aussi nécessaire d'introduire une formulation mathématique pour le champ de la pesanteur terrestre. Pour exprimer les écarts de ce dernier par rapport à un champ sphérique, on a recours à un développement en série de fonctions sphériques. Les coefficients du développement ainsi que les coordonnées des stations sont les inconnues du problème, inconnues que l'on obtient par la résolution, selon les moindres carrés, d'un système d'équations.

La Figure 3-5 représente la forme du géoïde déterminée par le calcul d'orbites de satellites au Goddard Space Flight Center (NASA). Ce modèle s'appuie sur une description du champ de la pesanteur terrestre par le développement en série de fonctions sphériques jusqu'à l'ordre 30. Les ondulations, qui atteignent en réalité une centaine de mètres au maximum par rapport à un ellipsoïde de référence, sont ici exagérées 15'000 fois.

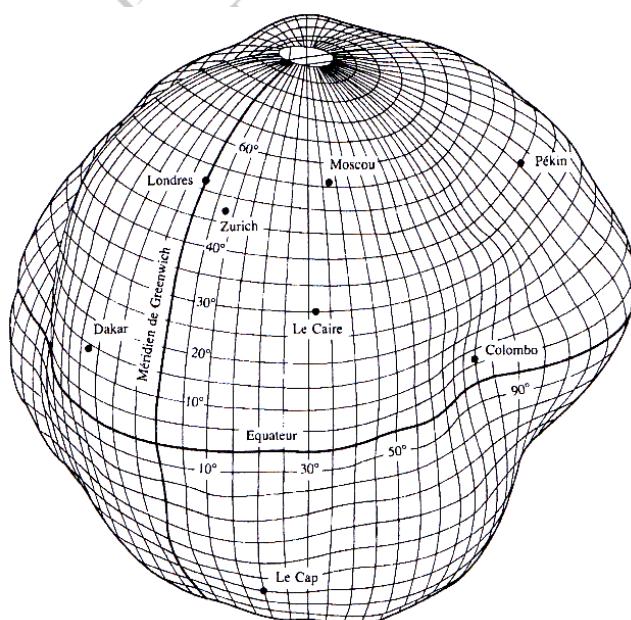


Figure 1-5 : Le géoïde

Les modélisations actuelles permettent de décrire géométriquement la Terre comme un corps déformable, grâce à de nouveaux modèles dynamiques incluant le paramètre temps. De tels modèles tiennent compte de

phénomènes connus, comme l'oscillation de l'axe des pôles, les marées terrestres et l'irrégularité de la rotation de notre planète. Parmi les usages de tels modèles, on peut citer deux exemples : le maintien sur leurs orbites des satellites utilitaires qui conditionne notamment la qualité de nos télécommunications, et l'étude de la vitesse de la dérive des continents, nécessaire à la prédition des tremblements de terre.

Comme cela a été précisé au début de cet article, la géodésie ne s'intéresse pas seulement à la forme et aux dimensions de la Terre ; elle sert également à acquérir des informations indispensables à la connaissance détaillée et à la cartographie d'un pays ou d'une région. La géodésie constitue même un préalable à cette acquisition. La **géodésie nationale** ou **utilitaire** a pour but de matérialiser et de déterminer un ensemble de repères solidement ancrés dans le sol et dont les positions relatives peuvent être connues avec une grande précision.

A l'époque des mesures par triangulation, ces repères étaient distants de 30 à 50 km. Ils étaient placés sur des endroits élevés d'où la vue est étendue. Leur position relative était calculée à quelques centimètres près. Ils formaient les sommets d'un réseau de grands triangles appelé réseau de triangulation fondamentale ou **triangulation géodésique**, ou encore **triangulation de premier ordre** d'un pays.

A partir d'un repère origine appelé **point fondamental**, où l'on a déterminé la latitude et la longitude ainsi que l'azimut d'un côté d'orientation par des observations astronomiques très soignées, on calcule les coordonnées géographiques des autres repères sur un ellipsoïde de référence. Des mesures astronomiques sont encore effectuées en quelques autres sommets du réseau afin d'en bien contrôler la position et l'orientation.

Avec l'avènement de GPS, ces réseaux géodésiques de base ont été modernisés et re-déterminés. Pour cela, les géomètres ont choisi et implanté de nouveaux points stables, plus accessibles et sans obstructions vers le ciel afin d'être adapté à la technique GPS (Figure 3-6).

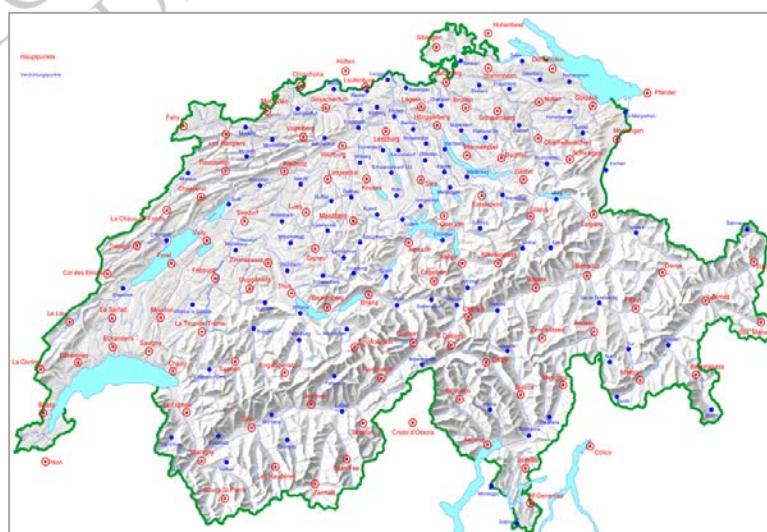


Figure 1-6 : Nouveau réseau de points fixes du cadre de coordonnées Suisse MN95

© 2013 swisstopo (JD100064)

Le réseau de points fixes de base décrit ci-dessus n'est pas suffisamment dense pour servir d'infrastructure aux divers travaux topographiques et autres opérations de géomatique. Il devra donc être complété par un maillage plus fin (réseaux de points fixes du deuxième ordre, puis du troisième et du quatrième ordre), jusqu'à ce que l'on obtienne une densité de 1 à 2 repères par km<sup>2</sup>. Pour cette opération, on a principalement recours à la méthode GPS qui peut être complétée par des méthodes topométriques classiques. De plus, le réseau permanent GPS, appelé AGNES<sup>1</sup>, offre un service de positionnement qui est directement rattaché au réseau des points fixes du cadre de coordonnées Suisse.

### 1.1.5. Altitudes

Un repère est caractérisé non seulement par ses coordonnées géographiques (longitude et latitude), mais aussi par son **altitude**, c'est-à-dire la distance, mesurée selon la verticale, entre ce repère et le géoïde (définition simplifiée parce que purement métrique). Là aussi, la mesure de l'altitude, ou **altimétrie**, doit donc être précédée d'une tâche préalable qui est celle de repérer le géoïde ou de définir le niveau moyen de la mer en un endroit choisi d'avance. On y parvient en observant et en enregistrant, durant une longue période, les variations de ce niveau à l'aide d'un appareil appelé **marégraphe** (Figure 1-7). Le traitement des enregistrements permet de fixer l'altitude **zéro**, que l'on matérialise par un repère.

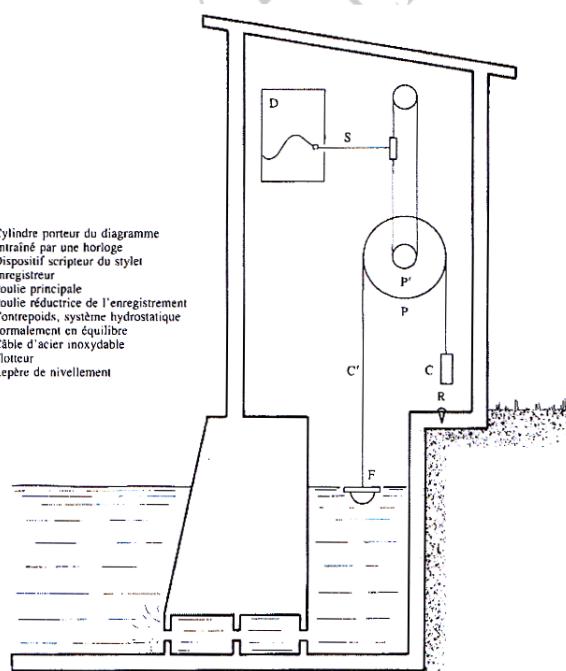


Figure 1-7 : Schéma d'un marégraphe

Pour déterminer, à partir de l'altitude d'un point fondamental, celle des autres repères, on procède par **nivellement géométrique** et l'on constitue ainsi le **réseau altimétrique**, formé de lignes de nivellement.

<sup>1</sup> AGNES : Automatisches GPS-Netz Schweiz, géré par l'office fédéral de topographie

Il y a lieu de formuler ici deux remarques importantes concernant l'altimétrie.

On pourrait très bien fixer arbitrairement l'altitude d'un repère fondamental et en déduire ensuite toutes les autres cotes. En fait, la référence au géoïde, c'est-à-dire au niveau moyen des mers, présente l'intérêt de mettre en évidence les variations de ce niveau. C'est un phénomène important aussi bien pour la géologie que pour la géographie humaine. Il soulève aussi des problèmes scientifiques difficiles, en particulier celui du niveau eustatique (variation du niveau de la mer). Est-ce le niveau marin qui monte ou la plate-forme continentale qui s'enfonce ? Le volume total des océans est-il constant ? A-t-il tendance à augmenter ou à diminuer ? Si un grand nombre de marégraphes sont en service aujourd'hui, c'est avant tout pour essayer de mettre en évidence les fluctuations du niveau moyen des mers. Ces observations sont complétées par les mesure de satellites d'altimétrie, comme TOPEX/Poseidon et plus récemment JASON. L'analyse des enregistrements des marégraphes français et italiens installés sur les côtes de la Méditerranée montre que, depuis plusieurs années, le niveau moyen de cette mer monte régulièrement de quelques millimètres par an.

La deuxième remarque, qui peut aussi s'appliquer à la triangulation, est la suivante : l'infrastructure d'un réseau altimétrique se détériore en fonction du temps ; les édifices sur lesquels sont scellés les repères vieillissent, sont modifiés ou démolis ; des repères sont donc détruits ou doivent être déclassés ; des mouvements locaux du terrain modifient les altitudes. On arrive donc à la conception qu'un réseau de nivellation n'est jamais définitif, mais qu'il vieillit vite ; il perd à la fois une partie de son infrastructure et de sa précision. L'expérience a démontré que, les zones instables mises à part, il est nécessaire de refaire les cheminements de nivellation tous les 50 ans environ.

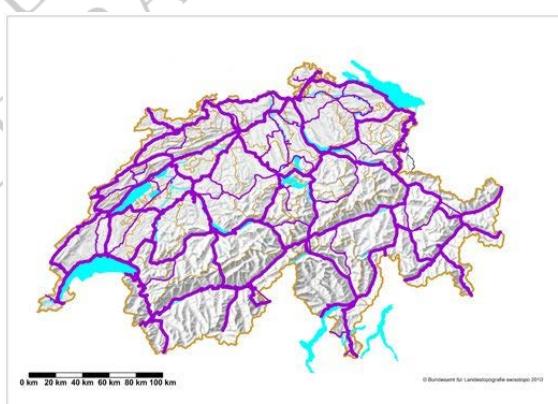


Figure 1-8 : Réseau principal de nivellation en Suisse.  
© 2013 swisstopo (JD100064)

La reprise des mesures après plusieurs dizaines d'années montre en effet des différences systématiques, nettement plus importantes que les imprécisions dues aux observations. Ces différences permettent de déceler les mouvements récents de l'écorce terrestre qui sont également détectés par les réseaux de stations GPS permanentes.

Depuis 1950, l'Autriche, la France, l'Italie et la Suisse ont mesuré une seconde fois une série de lignes de nivellation traversant la chaîne des Alpes et qui avaient été observées au début du siècle. L'analyse des observations a permis de mettre en évidence le mouvement toujours ascendant des régions alpines ; la vitesse des déplacements verticaux vaut actuellement 1 mm/année.

## 1.2. Références géodésiques

### 1.2.1. Surface de niveau, géoïde et ellipsoïde

L'objet de la topographie étant la représentation de la configuration du sol et des éléments qui s'y trouvent, il faut définir les différentes surfaces se rapportant au sol et à la Terre en général.

La surface du sol (le terrain) telle qu'on la voit, avec ses vallonnements, ses montagnes, ses dépressions, etc. est la **surface topographique** de la Terre. Généralement, c'est elle qu'il s'agit de représenter.

En chacun de ses points, une **surface de niveau** est normale à la direction de la pesanteur, c'est-à-dire à la **verticale**. Il existe une infinité de surfaces de niveau, mais l'équipotentielle qui passe par le niveau moyen des mers présente un intérêt particulier. On lui attribue la cote zéro et on lui donne le nom de **géoïde**. **Le géoïde est la forme réelle de la Terre.**

Le géoïde présente des ondulations. Ce n'est pas une forme géométrique ; il est défini à partir de données physiques (le champ de la pesanteur) et son expression mathématique est très compliquée. Pour cette raison, on préfère recourir à d'autres surfaces de référence pour décrire la surface de la Terre.

L'ellipsoïde, dont le principe est développé dans le paragraphe suivant, est la surface mathématique dont la forme se rapproche le plus de celle du géoïde.

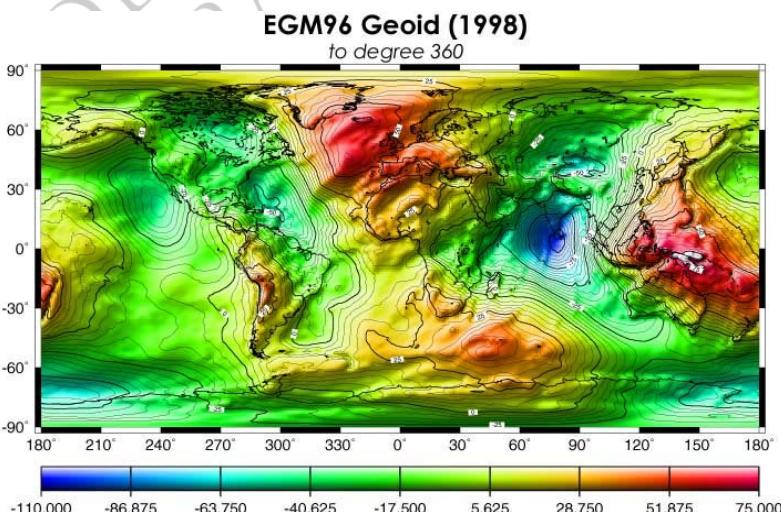


Figure 1-9 : Carte du géoïde mondial, modèle EGM96 (source NASA)

Variations exprimées en m

( © 2014 source : <http://www.swisstopo.ch> )

### 1.2.2. Surfaces de référence

Pour décrire le géoïde, donc la forme exacte de la Terre, on le définit par rapport à la surface mathématique dont la forme se rapproche le plus de celle du géoïde ; c'est un **ellipsoïde de révolution aplati aux pôles**.

Il s'agit d'une **surface de référence** par rapport à laquelle sont exprimés les écarts du géoïde.

Pour cela, il faut résoudre les problèmes suivants :

- déterminer les dimensions de cet ellipsoïde ;
- placer cet ellipsoïde pour qu'il corresponde au mieux avec le géoïde pour la zone à représenter.

Ce n'est qu'au XVII<sup>ème</sup> siècle que l'idée de l'aplatissement de la Terre est apparue et que l'on abandonna la forme sphérique. Depuis cette époque, de nombreuses mesures ont été faites pour déterminer les dimensions de l'ellipsoïde, c'est-à-dire les paramètres qui le définissent :

**les deux demi-axes de l'ellipse génératrice.**

La méthode géométrique, seule connue alors, consiste à mesurer des longueurs d'arcs de méridien sous des latitudes différentes, une au voisinage du pôle, l'autre près de l'équateur. Il faut citer ici les deux expéditions célèbres organisées au XVIII<sup>e</sup> siècle par l'Académie des sciences de Paris :

- la mesure d'un arc de méridien en Laponie (par Clairaut et de Maupertuis) 1736-1737
- la mesure d'un arc de méridien au Pérou (par Bouguer et La Condamine) 1735-1744

et dont les résultats prouvent pour la première fois l'aplatissement de la Terre aux pôles (théorie émise auparavant par Newton).

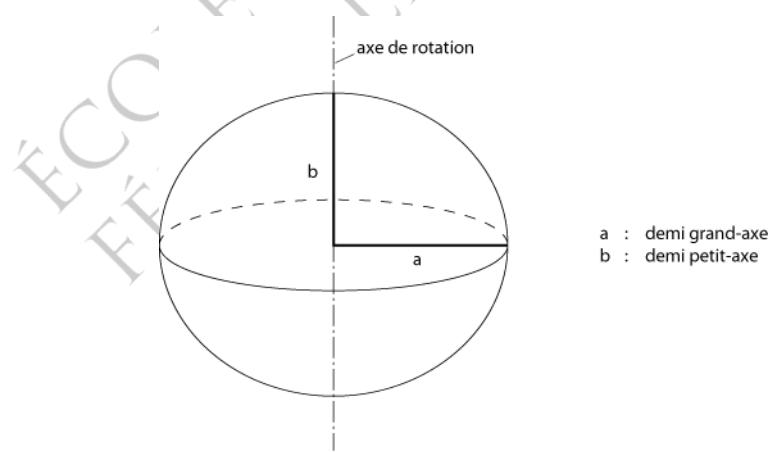


Figure 1-10 : L'ellipsoïde de révolution

Citons encore la mesure de l'arc de méridien Dunkerque-Barcelone (par Delambre et Méchain) 1792-1798, et dont les résultats servirent à la première définition du mètre en 1799 :

**un mètre est la dix-millionième partie  
du quart du méridien terrestre.**

Des procédés astronomiques ont aussi été appliqués pour déterminer l'aplatissement terrestre (d'Alembert et Laplace au XVIII<sup>ème</sup> siècle). Enfin, les procédés gravimétriques, permettant de mesurer l'intensité de la pesanteur en différents points du globe, conduisent également à la connaissance de la forme du géoïde.

Aujourd'hui, les satellites artificiels permettent de résoudre plus aisément ces problèmes et surtout apportent une plus grande exactitude dans les connaissances relatives à la Terre. On peut, à partir des variations constatées dans la valeur des paramètres qui fixent une orbite de satellite, obtenir les informations sur le champ de gravitation et par conséquent connaître toujours mieux le géoïde. On peut citer, par exemple, la mission du satellite CHAMP (<http://op.gfz-potsdam.de/champ/>).

Depuis le XVIII<sup>ème</sup> siècle, de nombreuses déterminations ont été faites pour connaître les dimensions de l'ellipsoïde de révolution pouvant représenter au mieux la forme de la Terre, et cela a conduit à autant de résultats différents. Aussi les pays, au fur et à mesure qu'ils entreprenaient de cartographier leur territoire, choisissaient-ils comme surface de référence un de ces ellipsoïdes particuliers et dont les paramètres semblaient alors les meilleurs possible. Le Tableau 3-1 donne les dimensions de quelques ellipsoïdes et leurs utilisations.

Mentionnons encore que, d'après les connaissances actuelles, le géoïde accuse une différence positive de 17,84 m au pôle nord et une différence négative de 27,23 m au pôle sud, ceci par rapport à l'ellipsoïde dont les dimensions ont été adoptées en 1980 par la XVII<sup>ème</sup> Assemblée générale de l'Union Géophysique et Géodésique Internationale (IUGG) (Figure 3-11).

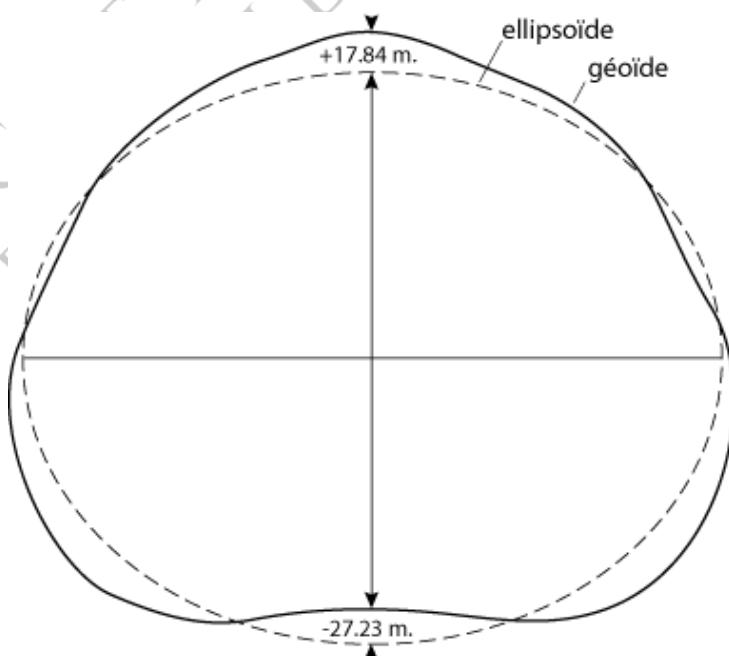


Figure 1-11 : Forme en poire du géoïde

L'ellipsoïde de révolution est donc la surface de référence mathématique grâce à laquelle on peut exprimer le géoïde. Mais il est à retenir aussi que, à cause des relativement petits écarts existant entre le géoïde et l'ellipsoïde, cette dernière surface pourra être considérée comme surface mathématique de référence pour les calculs : les mesures faites sur la surface de la Terre sont assimilées à des mesures faites sur un **ellipsoïde de révolution** et exploitées comme telles.

Nom	Année	a en mètre	b en mètre	Utilisation
Schmidt	1928	6'3 76'804	6'355'691	Ancienne cartographie Suisse : Carte Dufour, Atlas Siegfried
Bessel	1841	6'377'397.155	6'356'078.963	Nouvelle cartographie suisse Allemagne et Europe de l'Est
Delambre	1860	6'376'989	6'356'323	Carte française au 1 : 80'000, Anciennes cartes de l'Institut militaire belge
Clarke	1866	6'378'206.4	6'356'583.8	Angleterre, USA, Canada, Mexique
Hayford (international)	1910	6'378'388	6'356'911.946	Adopté en 1924 comme ellipsoïde international et proposé pour les nouvelles cartographies
Geodetic Reference System-GRS80	1980	6'378'137	6'356'752.314	Adopté par la XVIIème Assemblée générale de l'International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG)

Tableau 1-1 : Ellipsoïdes de référence

Pour des étendues terrestres très restreintes, on peut substituer une surface sphérique à la portion d'ellipsoïde correspondante : la surface de référence représentative de la Terre est alors une **sphère** qui épouse au mieux la courbure de l'ellipsoïde (sphère de courbure moyenne) ; les surfaces de niveau peuvent être considérées comme étant des sphères concentriques. C'est ainsi que pour les opérations où cette approximation suffit, on a choisi

**en Suisse le rayon de la sphère de courbure moyenne :**  
**R = 6378,8 km**

Enfin, si l'étendue du domaine où se font des mensurations est restreinte au point que la courbure de la Terre ne se fait pas sentir, on assimile la portion correspondante de la sphère (ou de l'ellipsoïde) à un **plan** ; les surfaces de niveau peuvent être assimilées à des plans horizontaux parallèles.

### 1.2.3. Coordonnées terrestres

Afin de pouvoir situer la position d'un point sur la surface de la Terre, il faut introduire un système de coordonnées sur cette surface (Figure 3-12) : on définit d'abord des lignes de coordonnées, les méridiens et parallèles,

puis les coordonnées elles-mêmes, latitude et longitude, qui sont ce qu'on appelle communément les **coordonnées géographiques**.

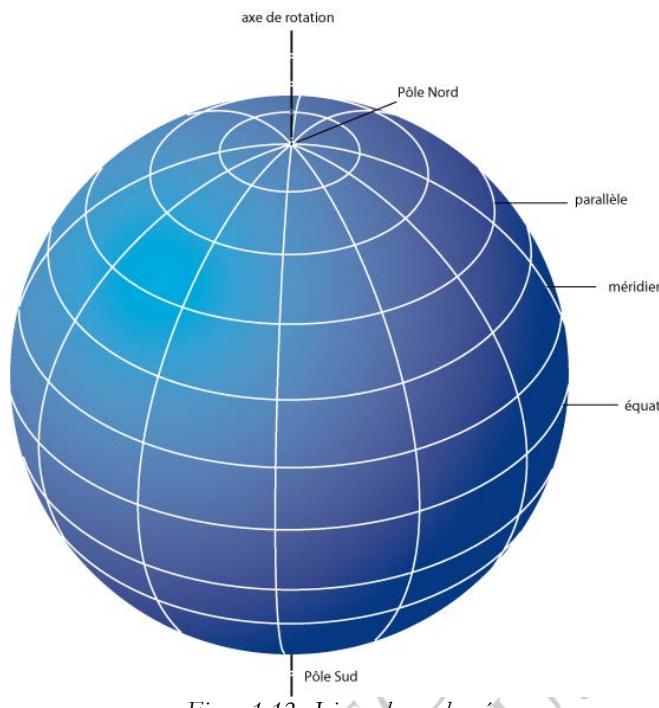


Figure 1-12 : Lignes de coordonnées

L'axe de rotation de la Terre coupe la surface terrestre en deux points qui sont les pôles terrestres : **pôle Nord** et **pôle Sud**.

Tout plan passant par l'axe des pôles coupe la surface terrestre suivant une ligne appelée **méridien** terrestre.

Le demi-méridien passant par un point est le **méridien de ce lieu**.

Le plan perpendiculaire à l'axe des pôles et passant par le centre de gravité de la Terre coupe la surface terrestre suivant une ligne appelée **équateur** terrestre. Tout autre plan perpendiculaire à l'axe des pôles coupe la surface terrestre suivant une ligne appelée **parallèle** terrestre.

Les méridiens et parallèles forment à la surface de la Terre un système de lignes de coordonnées orthogonales.

Les définitions qui viennent d'être données sont valables quelle que soit la forme de la Terre : géoïde, ellipsoïde ou sphère. Il en va de même pour la définition des coordonnées (Figure 3-13 et Figure 3-14).

La **latitude**  $\varphi$  d'un point de la surface de la Terre est l'angle que fait la normale à la surface en ce point avec le plan de l'équateur.

Les latitudes se comptent à partir de l'équateur, de  $0^\circ$  à  $+90^\circ$  sur l'hémisphère nord, de  $0^\circ$  à  $-90^\circ$  sur l'hémisphère sud. Souvent, on parle simplement de latitude Nord et de latitude Sud.

La **longitude**  $\lambda$  d'un point de la surface de la Terre est l'angle dièdre que fait le plan méridien passant par ce point avec un plan méridien origine ; par convention internationale, ce dernier est celui passant par **Greenwich** (observatoire de Londres).

Les longitudes sont comptées à partir de Greenwich de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  vers l'Est, ou de  $0^\circ$  à  $+180^\circ$  vers l'Est et à  $-180^\circ$  vers l'Ouest. Souvent, on parle simplement de longitude Est et de longitude Ouest. Souvent aussi, les longitudes s'expriment en heures (décomposition de la sphère en 24 fuseaux horaires)

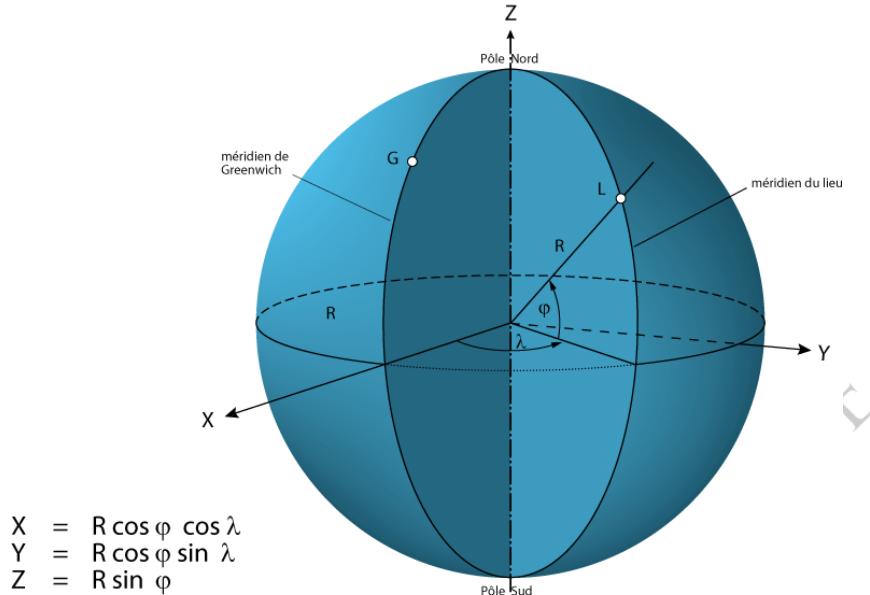


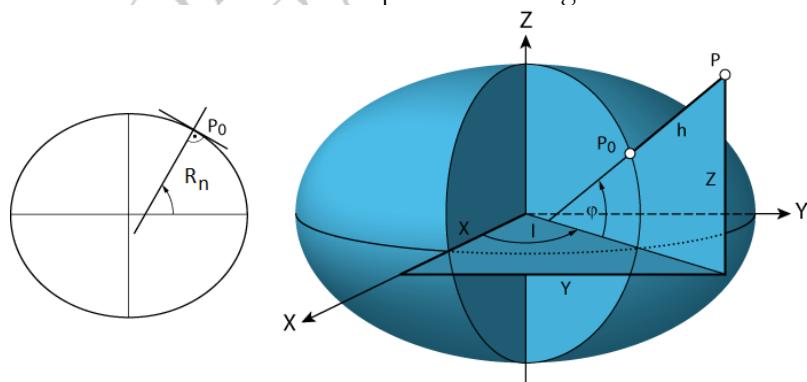
Figure 1-13 : Les coordonnées sur la sphère

Ces formules ne peuvent être utilisées pour calculer la latitude et la longitude uniquement dans le cas où  $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = R$ .

### Exemple : EPFL-Ecublens

$$\begin{aligned}\varphi &= 46^\circ 31' \text{ N (Nord)} \\ \lambda &= 6^\circ 34' \text{ E (Est de Greenwich)}\end{aligned}$$

On considère maintenant l'ellipsoïde de la Figure 3-14.



$$\begin{aligned}X &= (R_n + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= (R_n + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= (R_n(1 - e^2) + h) \sin \varphi\end{aligned}$$

avec  $(\varphi, \lambda, h)$  coordonnées géographiques sur l'ellipsoïde  
 $(X, Y, Z)$  coordonnées cartésiennes géocentriques  
 $R_n$  rayon de courbure normal (varie en fonction de la latitude)

Figure 1-14 : Les coordonnées sur l'ellipsoïde

Selon que  $(\phi, \lambda)$  expriment la position d'un point sur le géoïde ou sur un ellipsoïde ou sur une sphère, ces coordonnées ont des valeurs différentes. S'il s'agit de la position sur le géoïde, on parle de  **coordonnées astronomiques** ; si c'est sur une surface de référence, ce sont des  **coordonnées géodésiques ou ellipsoïdiques**. Les premières se réfèrent à la verticale du lieu, tandis que les secondes le font à la normale à la surface de référence en ce lieu. Les deux directions sont différentes l'une de l'autre et l'écart angulaire entre les deux est appelé  **déviation de la verticale**. Celle-ci dépend du choix de l'ellipsoïde et de sa position par rapport au géoïde (Figure 3-15).

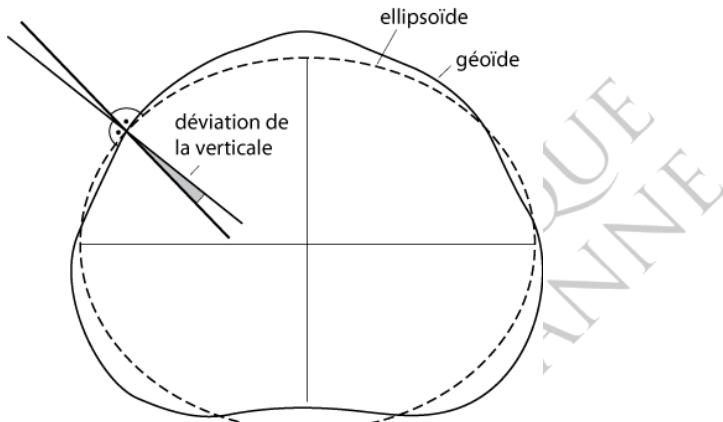


Figure 1-15 : La déviation de la verticale

#### 1.2.4. Ellipsoïde et changement de système

- **Généralités**

La latitude  $\Phi$  et l'altitude  $h$  que l'on obtient à partir des coordonnées géocentriques dépendent des **dimensions** de l'ellipsoïde choisi comme surface de référence et de sa **position** par rapport à la Terre, c'est-à-dire au géoïde.

L'ellipsoïde choisi et sa position forment ce que l'on appelle le  **datum géodésique**.

On parle de **système de référence terrestre** ou géodésique pour un système de coordonnées cartésiennes géocentriques associées à un datum géodésique.

- **Ellipsoïde global**

Avec le développement de GPS, qui est un système mondial de localisation, on se réfère aujourd'hui au système géodésique **WGS 84** (World Geodetic System) qui définit un **système global** de coordonnées cartésiennes géocentriques tridimensionnelles (X, Y, Z) dont :

- l'origine est le centre de gravité de la Terre
- l'axe **Oz** passe par le pôle nord CIO (Conventional International Origin)

- l'axe **Ox** est l'intersection du plan normal à **Oz** et contenant l'origine avec le plan méridien de Greenwich
- l'axe **Oy** définit un trièdre direct.

L'ellipsoïde de référence de ce système WGS 84 a les caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} a &= 6\,378\,137.0000 \text{ m} \\ b &= 6\,356\,752.3142 \text{ m} \quad \text{voir Tableau 3-1,} \\ f &= 1/298.257\,223\,563 \end{aligned}$$

ainsi que divers coefficients pour modéliser la rotation et le champ de gravité de la Terre. Dans le contexte de la localisation, on confond souvent les deux notions et on réduit WGS 84 à son ellipsoïde.

### • Ellipsoïde local

Avant que les techniques spatiales ne permettent de définir un ellipsoïde global, on a construit les cartes sur des surfaces de référence locales. De manière générale, chaque pays a défini la sienne.

Il faut définir les dimensions de l'ellipsoïde de référence, mais il faut encore le déplacer et l'orienter dans l'espace afin qu'il adhère au mieux à la portion de la Terre à représenter. Généralement, on a choisi un **point fondamental** dont les coordonnées géographiques (latitude et longitude) sont assimilées à ses coordonnées astronomiques. Ceci revient à fixer la déviation de la verticale à zéro pour ce point : la normale à l'ellipsoïde (mathématique) et la verticale (physique) sont confondues (voir Figure 3-15).

Sur une étendue limitée, un ellipsoïde local épouse mieux le géoïde qu'un ellipsoïde global, ce que la Figure 3-16 présente avec une exagération manifeste.

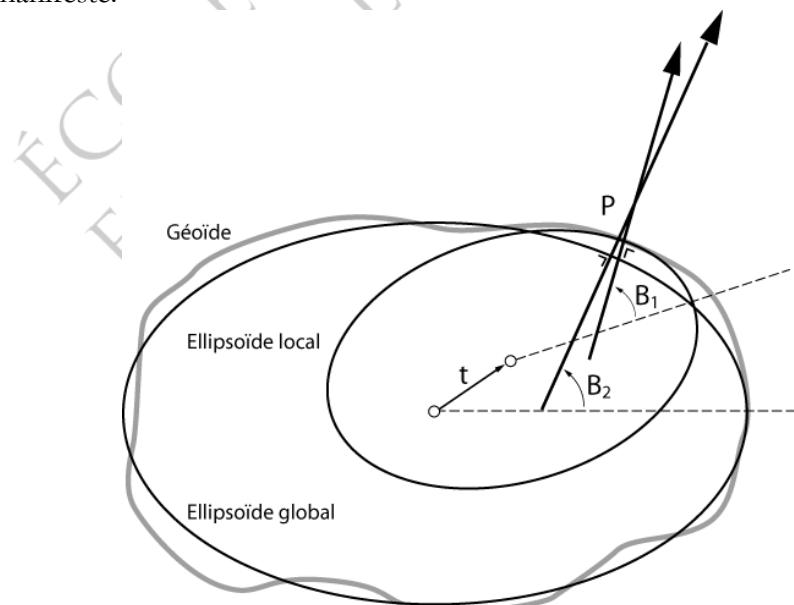


Figure 3-16 : Ellipsoïde global - ellipsoïde local (B : latitude du lieu)

Le système de référence Suisse CH 1903 est défini par les paramètres suivants :

Ellipsoïde de Bessel	Point fondamental
$a = 6\ 377\ 397.155\ m$	$B_0: 46^\circ\ 57' 08.66''$
$b = 6\ 356\ 078.962\ m$	$L_0: 7^\circ\ 26' 22.50''$
$f = 1/299.152\ 812\ 8$	

On a repris les dimensions de l'ellipsoïde allemand (Bessel 1841) mais on l'a calé à l'(ancien) observatoire de Berne, ce que les Allemands avaient fait à Berlin. En France, les dimensions de l'ellipsoïde sont légèrement différentes et il est calé, évidemment, à Paris. Il faut noter une conséquence concrète : pour deux pays voisins, les coordonnées géographiques d'un point sur la frontière sont généralement différentes car elles ne reposent pas sur la même référence géodésique.

Un nombre croissant de pays adopte le système WGS 84 avec des classes de systèmes compatibles et reposant sur des définitions quasi semblables : ITRS : International Terrestrial Reference System, ETRS89 : European Terrestrial Reference System, CHTRS95 : Système de référence global pour la Suisse défini en 1995. Toutefois, la variété et la quantité de données spatiales en usage empêchent leur transformation systématique. Par exemple, il est plus facile - et plus utile - de généraliser l'usage de WGS 84 dans l'aviation civile que dans les cadastres des canalisations du monde entier. Dans le premier cas, il s'agit d'harmoniser les données utilisées par les équipements des aéroports et par les instruments de bord. Dans le second cas, il faut considérer les plans et les bases de données les plus diverses. Toutefois, ces changements de systèmes de référence sont bien documentés par les Instituts nationaux de géographie et de topographie.

### • Changement de système géodésique

Pour calculer les coordonnées d'un repère exprimées par rapport à un système de référence géodésique dans un autre système, il faut appliquer aux coordonnées géocentriques une transformation spatiale conforme ou transformation de Helmert dans l'espace définie par 7 paramètres :

- 3 translations ( $tx, ty, tz$ ) selon les axes  $Ox, Oy, Oz$
- 3 rotations ( $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ) autour des mêmes axes
- 1 changement d'échelle ( $1 + m$ )

Depuis la fin des années 1980, on a effectué dans notre pays, avec les techniques GPS, la détermination dans le système WGS84 de nombreux repères du réseau de points fixes, connus en coordonnées et altitude dans notre système géodésique CH 1903. On a ainsi déterminé des "paramètres officiels" permettant de transformer les coordonnées géocentriques.

Paramètres pour la transformation de CH 1903 dans WGS 84 :

$tx = 660.077\ m$
$ty = 13.551\ m$
$tz = 369.344\ m$
$\theta_x = 2.484cc$

$$\begin{aligned}\theta_y &= 1.783 \text{cc} \\ \theta_z &= 2.939 \text{cc} \\ m &= 5.66 \text{ ppm}\end{aligned}$$

Cette transformation donne une précision de l'ordre du mètre sur l'ensemble du territoire national. On peut calculer la transformation inverse en changeant les signes. On ne l'utilise plus pour les travaux de mensuration.

Il faut remarquer le décalage important entre le centre de l'ellipsoïde suisse et celui de l'ellipsoïde global, qui correspond au centre de gravité de la Terre (géocentre), déterminé selon les techniques les plus récentes. En revanche, on notera la modestie des rotations. Les coordonnées géographiques (latitude et longitude) d'un point dépendent de l'ellipsoïde choisi pour référence. En Suisse, confondre des coordonnées WGS84 et des coordonnées CH03 provoque une faute de env. 300 m. Ceci se produit si l'on omet de sélectionner la transformation adéquate pour un récepteur GPS.

### Nouveau système pour la mensuration Suisse : CH1903+

Le GPS a permis de mesurer avec grande précision des points fixes du système de référence géodésique Suisse. Ainsi on a pu mettre en évidence des écarts importants dans la réalisation de CH1903 à l'échelle du pays. Face à ce constat, l'Office fédéral de topographie a défini un nouveau système (CH1903+) et un nouveau cadre de coordonnées (MN95) compatibles avec les méthodes modernes de mesures et avec le système géodésique global pour la Suisse CHTRS95.

Paramètres pour la transformation de CH 1903+ dans CHTRS95 :

$$\begin{aligned}tx &= 674.374 \text{ m} \\ ty &= 15.056 \text{ m} \\ tz &= 405.346 \text{ m}\end{aligned}$$

#### 1.2.5. Azimut, azimut magnétique

Les méridiens et les parallèles forment sur la surface de la Terre un système de lignes de référence (lignes de coordonnées), dans lequel il faut également pouvoir définir l'**orientation d'une direction** quelconque. A cet effet, on a :

**L'azimut a d'une direction** est l'angle qu'elle fait avec le méridien.

En géodésie, l'origine des azimuts est la direction nord du méridien, appelé aussi **Nord géographique**, et on les compte positivement vers l'Est de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  (ou de  $0^\text{gon}$  à  $400^\text{gon}$ ), donc dans le sens Nord-Est-Sud-Ouest (**NESO**).

L'azimut  $a_{PQ}$  d'un côté **PQ** situé sur la surface de référence terrestre est l'angle que font entre elles, au point P, les tangentes à l'arc **PQ** et au méridien (Figure 3-17). Cet angle est situé dans le plan tangent à la surface en **P** (plan horizontal) ; par conséquent l'azimut est un angle horizontal. Sauf cas particuliers, on a :

$$a_{PQ} \neq a_{QP} \pm 180^\circ$$

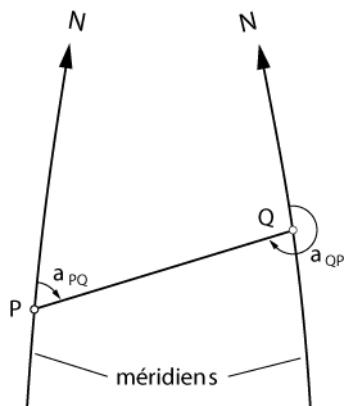


Figure 1-17 : Les méridiens et azimuts

L'azimut magnétique  $a_m$  d'une direction est l'angle qu'elle fait avec la direction du Nord magnétique (Figure 3-18).

Il est aussi compté de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  (ou de  $0^{\text{gon}}$  à  $400^{\text{gon}}$ ) à partir du nord dans le sens **NESO**. La direction du Nord magnétique (**Nm**) est indiquée par l'aiguille aimantée d'une boussole.

La **déclinaison magnétique**  $\delta_m$  est l'angle compris entre la direction du Nord géographique (direction nord du méridien) et celle du Nord magnétique.

$$\delta m = a - a_m$$

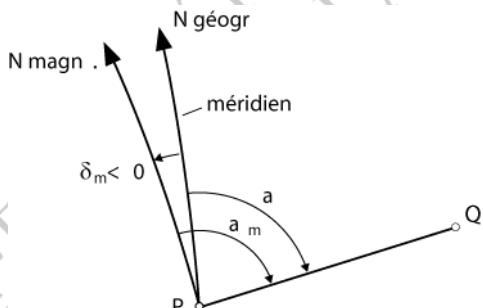


Figure 1-18 : La déclinaison magnétique

Le pôle magnétique n'est pas fixe et il en résulte que la direction du Nord magnétique en un lieu varie dans le temps : il y a une **variation séculaire**, lente et continue, et une **variation journalière**, plus sensible, oscillant par rapport à une valeur moyenne (Figure 3-19).

Le point a une valeur moyenne (Figure 3-19). Du fait des variations de la direction du Nord magnétique, ainsi qu'à cause des influences locales auxquelles l'aiguille aimantée d'une boussole peut être soumise, la référence magnétique est peu utilisée en topographie.

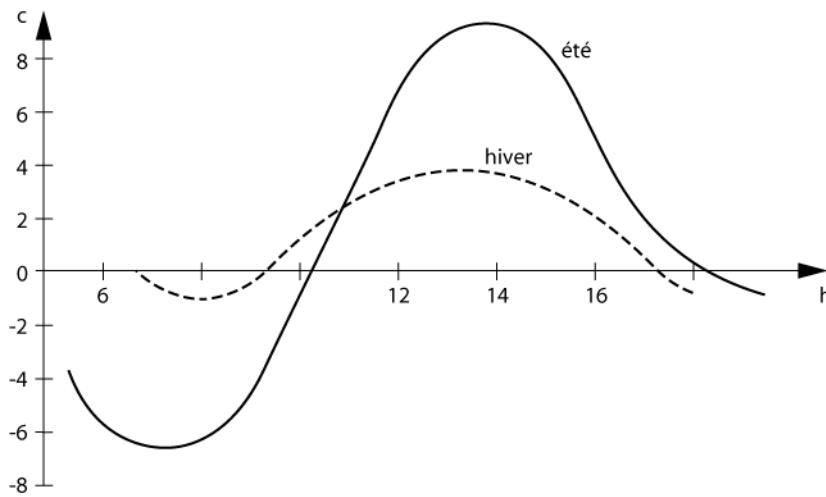


Figure 1-19 : Variation journalière de la direction du Nord magnétique par rapport à sa moyenne

A Lausanne **en 2011**, la valeur de la déclinaison magnétique est d'environ  $1^{\circ}04'$ . Elle augmente chaque année d'environ  $9'$ .

### 1.2.6. Systèmes d'altitudes

L'**altitude ellipsoïdique**  $h$  est la distance, selon la normale, entre un repère **A** et l'ellipsoïde de référence. Il s'agit d'une grandeur purement géométrique qui ne correspond pas à l'altitude que l'on obtient par niveling et qui se rapporte au géoïde. Pour passer de l'altitude ellipsoïdique  $h$  à l'altitude usuelle  $H$  selon le niveling, il est nécessaire de connaître l'ondulation ou la cote du géoïde  $N$  indiquée sur la Figure 3-20.

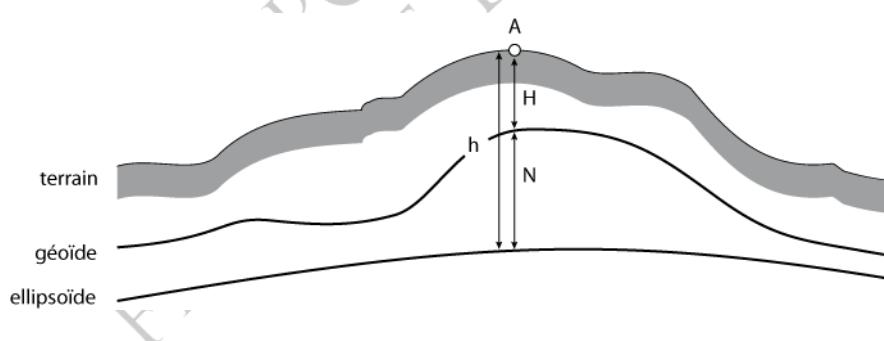


Figure 1-20 : La cote du géoïde ( $N$ )

En première approximation :  $h = H + N$

La connaissance précise du géoïde dans une région est donc nécessaire si l'on veut pouvoir passer d'un système d'altitude à l'autre. Elle implique de déterminer, pour un ensemble de repères :

- les altitudes ellipsoïdiques obtenues par observations des satellites ;
- les altitudes usuelles, issues des travaux de niveling.

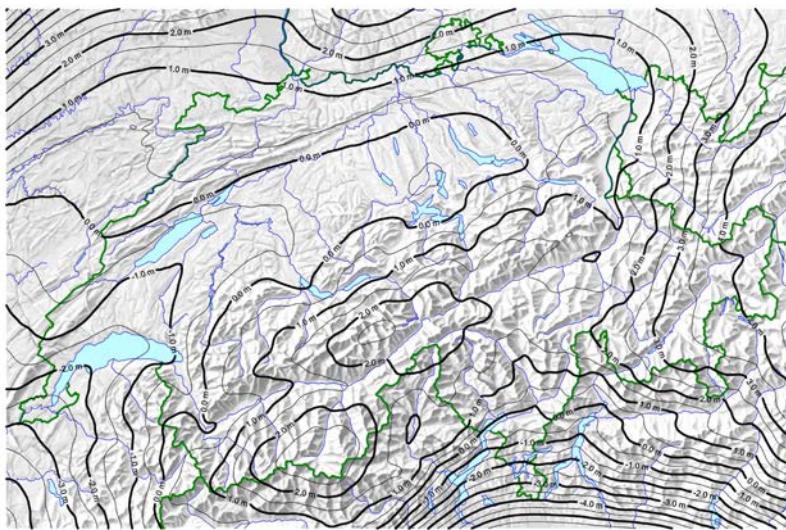


Figure 1-21 : Carte du géoïde en Suisse, variations exprimées en m  
 © 2013 swisstopo (ID100064)

Les recherches concernant les **ondulations** du géoïde ont débuté vers 1930. La multiplication des mesures gravimétriques précises, sur les continents d'abord, puis en mer, ainsi que l'unification de vastes réseaux de triangulation constituant des ensembles cohérents très étendus (Europe, URSS, Etats-Unis), a permis de réaliser les premières cartes donnant, sous forme de courbes de niveau, les différences d'altitude entre le géoïde et un ellipsoïde de référence. Plusieurs équipes de chercheurs ont collecté de très nombreuses mesures et ont présenté des résultats largement concordants sous la forme de modèles standard de la Terre (Figure 3-9).

La Suisse a également développé son propre modèle local du géoïde qui est décrit par rapport au système de référence géodésique CH1903. Ce modèle est disponible auprès de l'Office fédéral de topographie sous forme numérique et permet une interpolation des valeurs de cote N sur l'ensemble du territoire. Les valeurs de cotes du géoïde s'étendent de -2m (Genève) à + 4m (Grisons). Certains récepteurs GPS intègrent directement ce modèle numérique de manière à fournir à l'utilisateur des altitudes usuelles compatibles avec les données des réseaux de nivellation (Figure 3-21).

Exemple altitude de l'EPFL :

h (hauteur sur l'ellipsoïde) : 407,847 m

N (cote du géoïde) : -1,548 m

$$H(\text{usuelle}) = h - N = 407,847 - (-1,548) = 409,395 \text{ m}$$

(ref : station AGNES de l'EPFL)

## 2. Systèmes de projection

### 2.1. Définitions

Les cartes géographiques et topographiques sont des représentations planes de la surface terrestre. Pour les obtenir, il faut faire appel aux **systèmes de projection** : ils établissent une relation ponctuelle univoque entre deux surfaces quelconques et il existe une infinité de solutions.

Il s'agit ici d'obtenir une image plane d'une surface de référence terrestre, ellipsoïde ou sphère. On ne traite que de projections d'une de ces surfaces dans le plan. Sur la surface de référence, on a le système de coordonnées géographiques  $(\varphi, \lambda)$ , tandis que dans le plan on définit un système de coordonnées rectangulaires  $(x, y)$ . Une projection est définie par les relations :

$$x = f_1(\varphi, \lambda) \text{ et } y = f_2(\varphi, \lambda)$$

Les deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  pouvant être tout à fait quelconques. Cependant, on ne retient que les solutions qui présentent un intérêt du point de vue cartographique.

En règle générale, lorsque l'on projette une surface  $S$  sur une deuxième surface  $S'$ , une figure géométrique tracée sur la surface originale change de **grandeur et de forme** sur la surface de projection. On dit que la projection donne lieu à des déformations.

On distingue **trois types** de déformations :

- la déformation linéaire ;
- la déformation angulaire ;
- la déformation de surface.

Il est possible de trouver des projections qui conservent les angles ou les surfaces, ou des projections qui conservent certaines distances (il n'existe aucune projection qui conserve toutes les longueurs).

Lorsque la surface originale est une sphère ou un ellipsoïde de révolution (les surfaces de référence employées pour les calculs géodésiques), il est impossible de trouver une projection de ces surfaces sur un plan ou sur une surface développable (les surfaces de projection) qui ne provoque aucune déformation. On choisira alors, suivant le but recherché, la projection qui donne lieu aux déformations les plus petites ou les moins gênantes.

Il y a plusieurs façons d'établir une classification des divers systèmes de projection mis en œuvre pour les travaux de topométrie et de cartographie. Cela dépend du critère de classification retenu :

- les **propriétés de la projection** (conformité, équivalence, équidistance)
- le **type de surface de projection** qui peut être non seulement un plan, mais aussi une surface développable comme un cône ou un cylindre de révolution.

Les propriétés des projections établissent le classement suivant :

- les **projections conformes** ou autogonales, qui conservent les angles. Elles sont à la base des cartographies topographiques car elles permettent le report direct des angles mesurés sur le terrain. Elles sont choisies pour un pays ou un groupe de pays, en tenant compte de l'étendue et de la forme géométrique du territoire et pour que les déformations linéaires soient aussi petites que possible.
- les **projections équivalentes**, qui conservent les aires. Elles sont intéressantes pour établir des cartes d'atlas.
- les projections qui ne conservent ni les angles ni les aires, mais qui peuvent avoir d'autres caractéristiques intéressantes suivant les cas.

Le second procédé de classement, dépendant du type de la surface de projection, est le suivant :

- projections **coniques** ;
- projections **azimutales** ;
- projections **cylindriques**.

Le cône, le plan ou le cylindre peuvent occuper une position quelconque par rapport à la surface de référence. Des exemples de projections (Figure 4-1) sont détaillés dans la suite de l'énoncé.

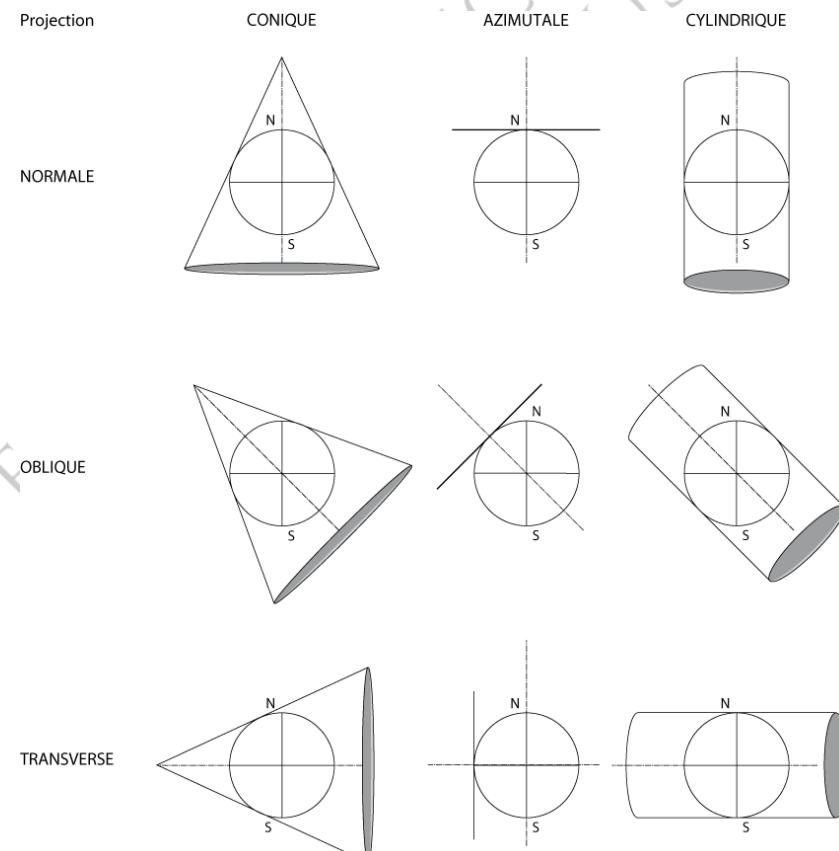


Figure 2-1 : Classification des projections

En outre, on parle de **projection normale** dans le cas où le plan est tangent à l'un des pôles ou lorsque l'axe du cône ou du cylindre est confondu avec l'axe des pôles de la surface de référence.

La projection est **transversale** quand l'axe du cône ou du cylindre est perpendiculaire à l'axe de la surface de référence ou lorsque le plan de projection est tangent à la surface en un point de l'équateur.

Dans tous les autres cas, la projection est **oblique**.

## 2.2. Types de projection

### 2.2.1. Projections coniques

## • Généralités

Considérons un cône de révolution dont l'axe est confondu avec l'axe NORD-SUD d'une sphère représentant la Terre et qui est tangent à cette surface selon un **parallèle de contact** de latitude  $\phi_0$  (Figure 4-2).

Par définition, une projection conique de la sphère a les caractéristiques suivantes :

- un méridien de la sphère se projette selon la génératrice du cône qui lui est tangente ;
  - sur la génératrice du cône, la position d'un point est fonction de sa latitude seulement.

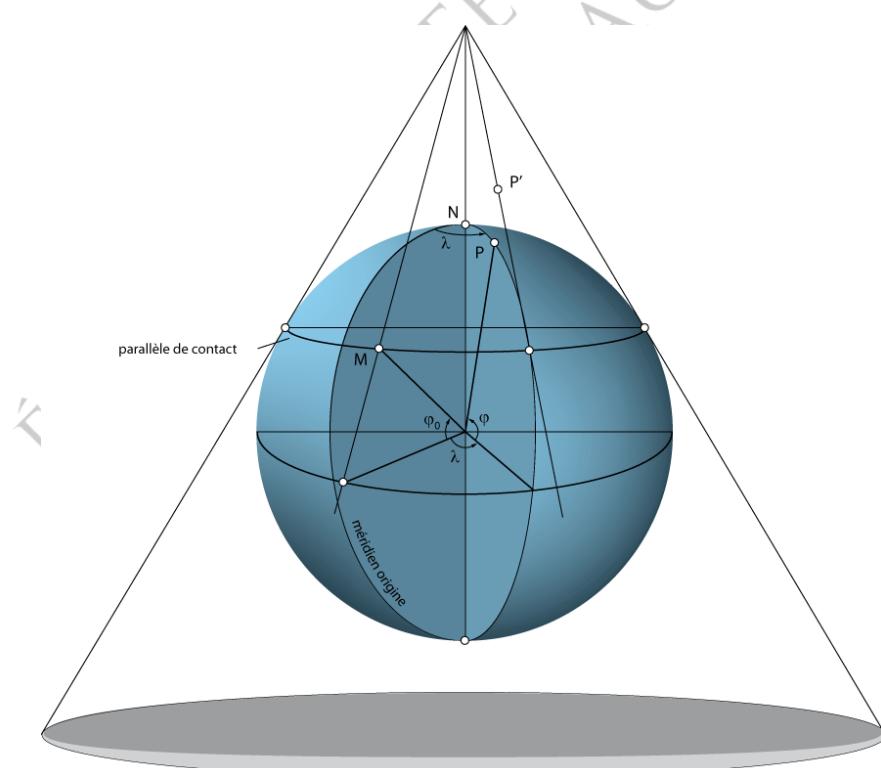


Figure 2-2 : La projection conique

Lorsque l'on développe le cône (Figure 4-3), l'image de la sphère est un secteur circulaire sur lequel :

- les méridiens projetés forment un **faisceau de droites** issues de l'image du sommet du cône ;

- les parallèles projetés sont des **cercles concentriques** dont le centre est l'image du sommet du cône.

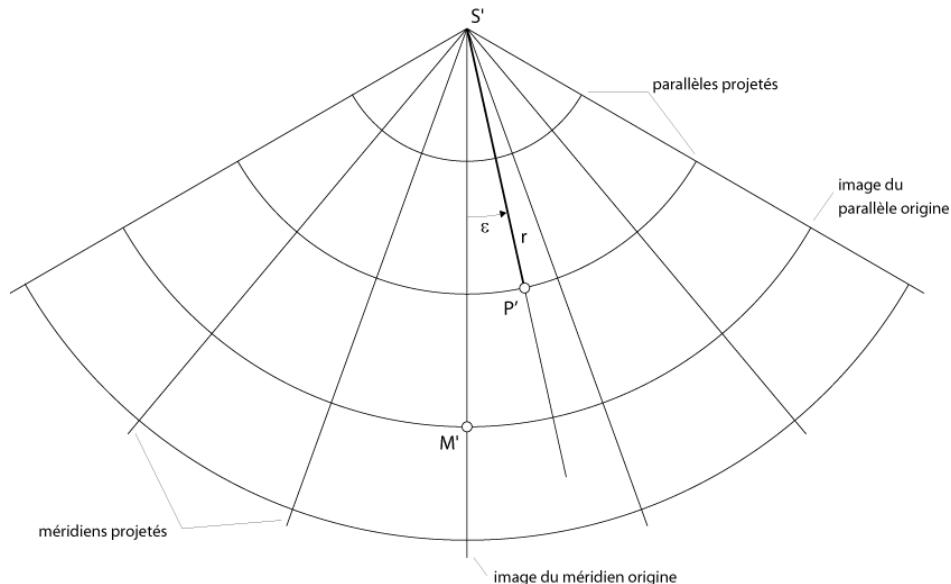


Figure 2-3 : Développement du cône de projection

Les méridiens et les parallèles sont orthogonaux sur la sphère et en projection ; ce sont les **directions principales** des projections coniques.

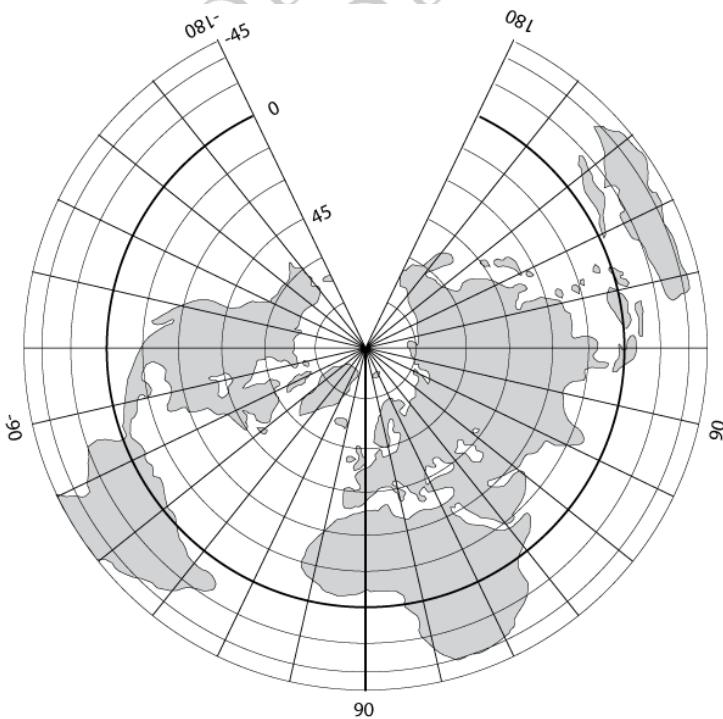


Figure 2-4 : Projection de Ptolémée (2<sup>ème</sup> siècle après J.C.)

- **Exemple : projection conique conforme de Lambert**

*(Jean-Henri Lambert, 1728-1777, mathématicien français)*

C'est le système de projection qui a été adopté pour la **cartographie de la France** : un cône est tangent à l'ellipsoïde de révolution le long d'un parallèle. Afin de maintenir les déformations linéaires dans des limites acceptables, ce sont en fait 3 cônes successifs qui ont été placés pour la métropole, plus un 4<sup>e</sup> pour la Corse.

Le **méridien origine**, devenant **l'axe des y**, est celui de l'observatoire de Paris.

**L'axe des x** est, pour chaque zone, la tangente à la projection d'un parallèle central, au point situé sur le méridien origine :

- Zone Nord : Lambert I,  $\varphi = 55$  gon N, parallèle central
- Zone Centre : Lambert II,  $\varphi = 52$  gon N, parallèle central
- Zone Sud : Lambert III,  $\varphi = 49$  gon N, parallèle central
- Zone Corse : Lambert IV,  $\varphi = 46,85$  gon N, parallèle central

Ainsi, les déformations linéaires sont normalement comprises entre -12 cm/km et +16 cm/km, avec maximums +26 cm/km à l'extrême Nord et +36 cm/km à l'extrême Sud du pays.

Avec la réforme de son système géodésique, la France a également défini un nouveau système de projection unique et qui couvre l'ensemble du territoire, le système Lambert-93 (Figure 4-5). Bien que les déformations soient importantes au Nord et au Sud de la France, ce système unique facilite les opérations de transformations de coordonnées et permet de travailler avec un seul système pour des données numériques stockées dans une infrastructure nationale de géodonnées.

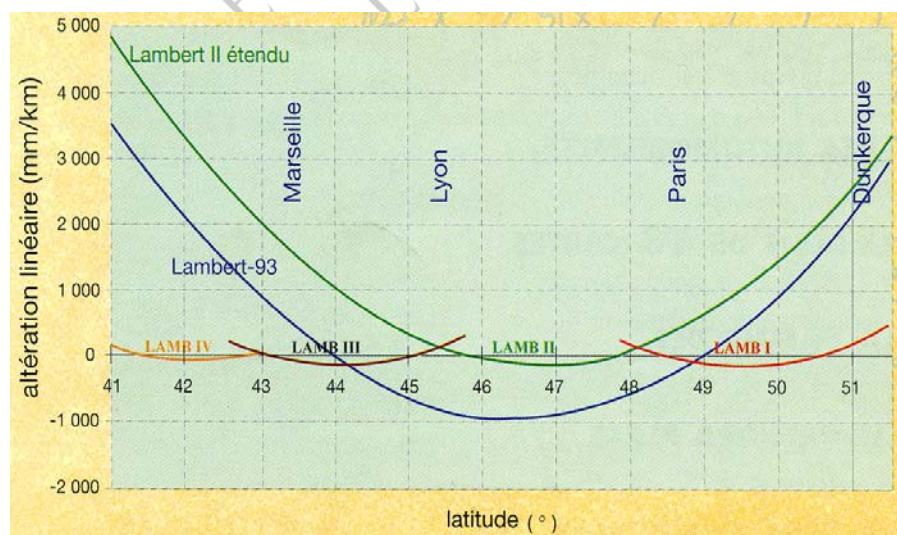


Figure 2-5 : Altération linéaire des systèmes de projection en France

### 2.2.2. Projections azimutales

- **Généralités**

Les projections azimutales peuvent être considérées comme des cas particuliers des projections coniques dans lesquelles le cône de projection est ouvert jusqu'à ce que son sommet soit en contact avec la sphère (le cône est devenu un plan) et que le parallèle de contact se réduise à un point. Ces projections ont la particularité de conserver les azimuts au point de contact.

On projette la sphère sur un plan tangent ; dans le cas d'une projection azimutale normale, ce plan est tangent à la sphère à l'un des pôles.

Les méridiens se projettent selon des droites concourantes et les parallèles selon des cercles concentriques fermés.

- **Exemples**

On peut citer trois cas particuliers de projections azimutales : la projection gnomonique, la projection stéréographique et la projection orthographique. Il s'agit de projections perspectives, dont le centre de projection est situé sur l'axe de rotation de la Terre.

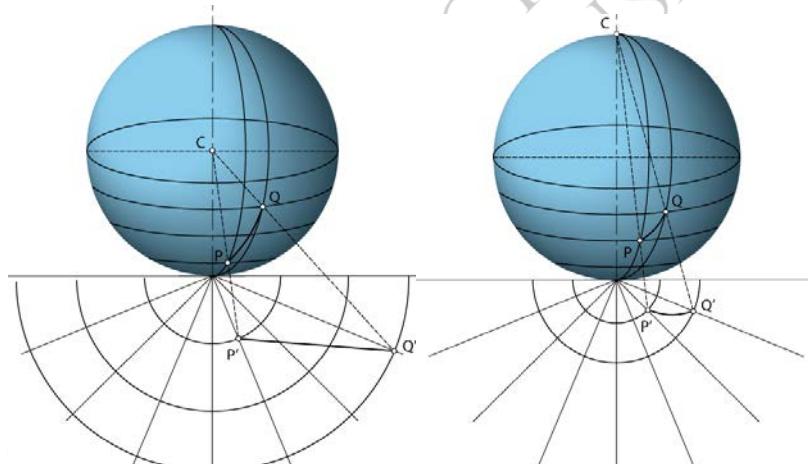


Figure 2-6 : Les projections gnomonique et stéréographique

### 2.2.3. Projections cylindriques

- **Généralités**

On peut aussi considérer les projections cylindriques comme cas particuliers des projections coniques.

On projette la sphère sur un cylindre tangent que l'on développe pour obtenir le plan :

- **projection cylindrique normale** : l'axe du cylindre coïncide avec l'axe de rotation de la Terre et le cylindre est tangent à la sphère terrestre le long de l'équateur (**exemple: projection de Mercator**).

- **projection cylindrique transversale** : l'axe du cylindre est dans le plan de l'équateur et le cylindre tangent à la sphère terrestre le long d'un méridien (**exemple : projection UTM**).
- **projection cylindrique oblique** : l'axe du cylindre est oblique par rapport à l'axe de rotation de la Terre et le cylindre tangent à la sphère le long d'un grand cercle quelconque (**exemple : la projection suisse**).

Dans la suite, trois exemples de projections sont développés. On peut ajouter à ces projections, la projection cylindrique équivalente et la projection transverse Mercator.

#### • Exemple 1 : Carte plate rectangulaire

(*Marin de Tyr, env. 100 ap. J.-C.*)

Le cylindre est tangent à la sphère le long de l'équateur ; les méridiens se projettent selon les génératrices du cylindre, les parallèles selon des cercles directeurs. En développant le cylindre, l'image des méridiens est faite de droites parallèles entre elles et celle des parallèles terrestres de droites perpendiculaires aux méridiens. Dans le plan, l'équateur est une droite qui définit l'axe des abscisses  $x$ , et le méridien origine devient l'axe des ordonnées  $y$  (Figure 4-7).

Les formules de la projection sont les plus simples possible :

$$x = \rho \cdot \lambda \quad \text{et} \quad y = \rho \cdot \varphi$$

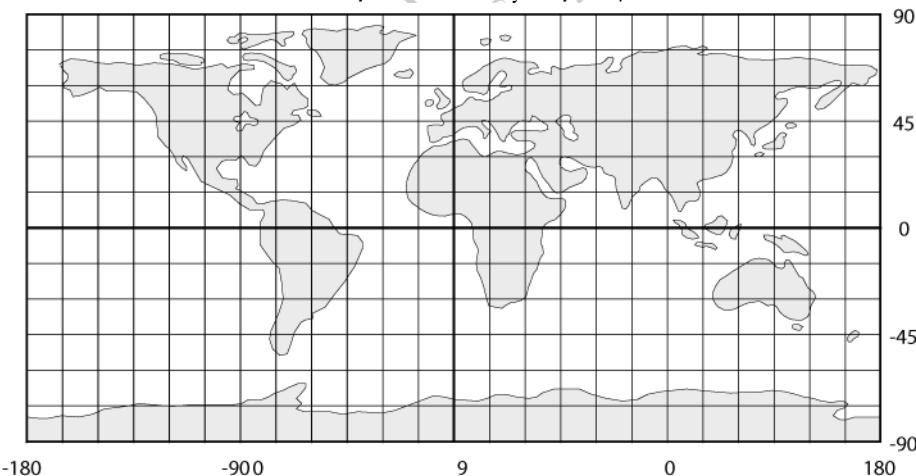


Figure 2-7 : La carte plate rectangulaire

La Terre est projetée dans un rectangle de largeur  $2\pi r$  et de hauteur  $\pi r$ .

Cette projection n'est ni conforme, ni équivalente ; les déformations augmentent en allant depuis l'équateur (non déformé) vers les pôles (déformation infinie).

#### • Exemple 2 : Projection de Mercator

(*Projection cylindrique conforme*)

En choisissant convenablement la fonction  $f_2$ , on peut obtenir une projection conforme :

$$x = r \cdot \lambda \text{ et } y = r \cdot \ln \left\{ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right\}$$

La Terre est projetée dans une bande de largeur  $2\pi r$  et de hauteur infinie. Les déformations linéaires augmentent en allant depuis l'équateur vers les pôles qui sont rejetés à l'infini ; les parallèles équidistants sont de plus en plus espacés (Figure 4-8).

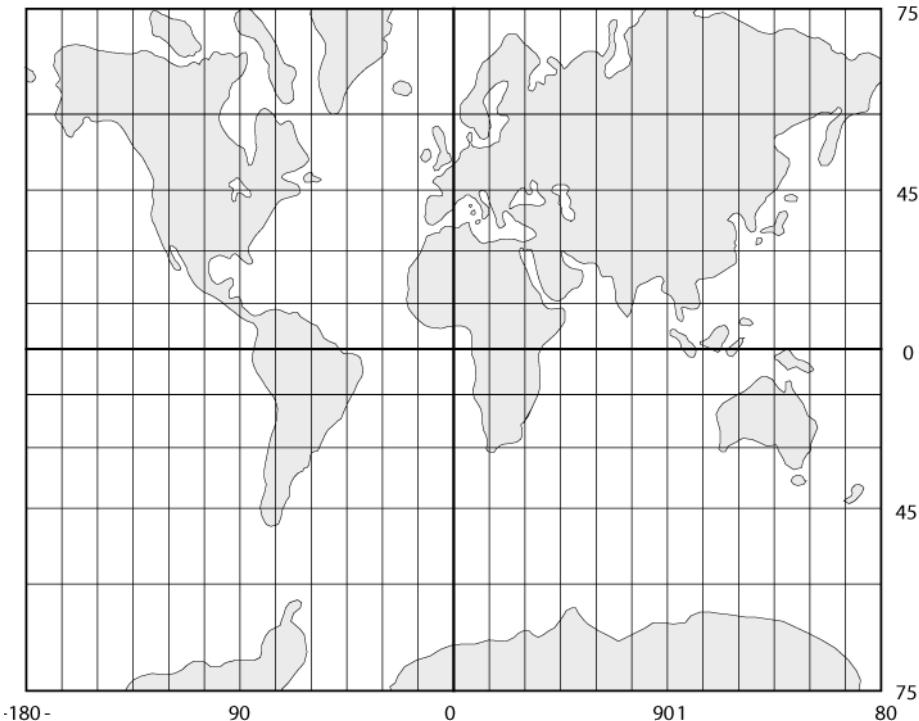


Figure 2-8 : Carte résultante de la projection Mercator

Cette projection, dite de Mercator (1512-1594, mathématicien flamand de son vrai nom Gerhard Kremer), est **conforme** et elle a joui d'une grande notoriété pour la navigation à cause de la propriété suivante.

Une **loxodromie**, qui est une ligne qui coupe tous les méridiens sous le même angle (azimut constant ou même cap le long d'une route), est représentée par une droite.

Par contre, une **orthodromie**, route la plus courte d'un point à un autre, est projetée suivant une courbe qui diffère d'autant plus de la loxodromie que l'on se trouve plus éloigné de l'équateur (Figure 4-9).

La projection de MERCATOR a été utilisée pour l'établissement de cartes à petite échelle sur de très grandes surfaces et pour des représentations générales de la Terre limitées en principe aux latitudes jusqu'à  $\pm 75^\circ$ , car les déformations deviennent trop importantes à partir de cette valeur puisque les pôles sont rejetés à l'infini.

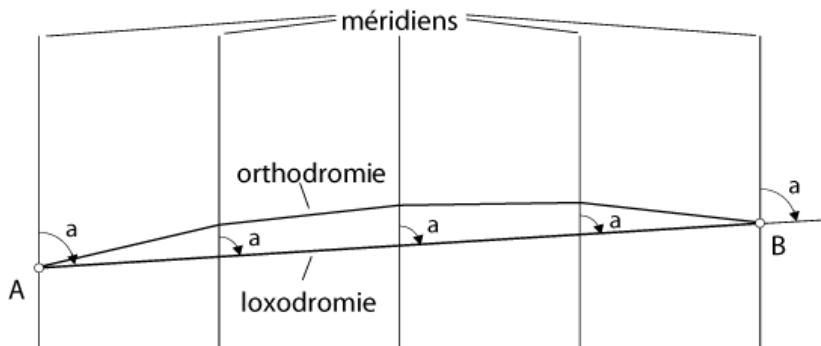


Figure 2-9 : Loxodromie et orthodromie projetées selon Mercator

- **Exemple 3 : Projection Universal Transverse Mercator**

Une généralisation du système Transverse Mercator (il s'agit d'une projection cylindrique transversale, le cylindre étant tangent à l'ellipsoïde le long d'un méridien) pour toute la Terre, a conduit à la projection UTM, construite sur l'ellipsoïde international (Hayford).

Afin que les déformations linéaires restent petites, la zone s'étendant de part et d'autre du méridien de contact est limitée à  $\pm 3^\circ$  de longitude. La projection couvre donc un fuseau de  $6^\circ$  d'amplitude en longitude et l'on a fait un découpage de la Terre en 60 fuseaux. Le méridien de Greenwich est à la limite des fuseaux 30 (à l'ouest) et 31 (à l'est) ; la Suisse se trouve dans le fuseau 32.

Les formules et tables établies pour un fuseau sont valables pour tous les fuseaux, d'où la désignation de système universel.

En projetant le méridien de contact en vraie grandeur, la déformation linéaire atteint  $+40 \text{ cm/km}$  (400 ppm) à environ 200 km à l'Est et à l'Ouest du méridien central. Elle dépasse même  $+1 \text{ m/km}$  à 300 km. Pour réduire cet allongement des distances projetées, on applique dans la projection UTM un coefficient  $m$  de 0.9996 sur les distances projetées, donc sur les coordonnées planes.

Le méridien central est ainsi raccourci de 40 cm/km et le coefficient  $m$  prend les valeurs suivantes :

- sur le méridien central	$m = 0.9996$	-40 cm/km
- à 180 km Est ou Ouest	$m = 1.0000$	vraie grandeur
- à 240 km	$m = 1.0004$	+ 40 cm/km
- à 300 km	$m = 1.0007$	+ 70 cm/km
- à 340 km	$m = 1.0010$	+ 1 m/km

Grandes zones	Carrés de 100 km x 100 km
Paris : 31U	Rouen : 31 UCQ
Berlin : 33U	Bastia : 32 TNN
Rabat : 29S	Toulouse : 31 TCI

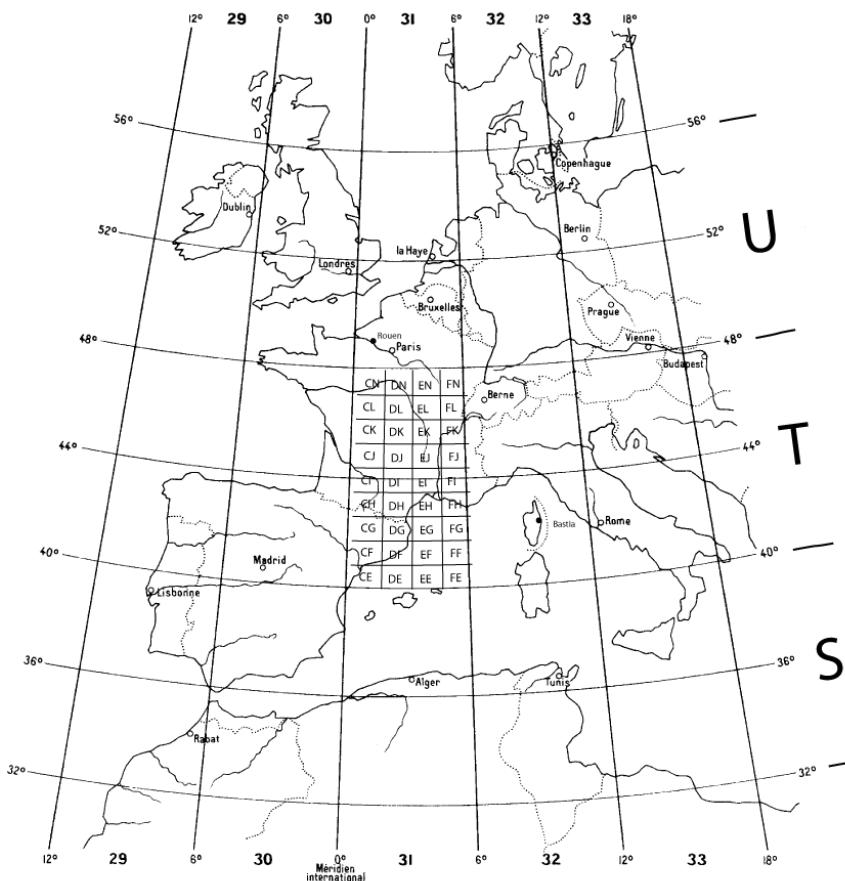


Figure 2-10 : Numérotation des fuseaux et des secteurs de la projection UTM

### 2.3. Projection Suisse

Comme toutes les cartographies, celle de la Suisse est fondée sur un système de projection. La première carte du pays établie dans un système unique a été la **Carte Dufour** à l'échelle 1 : 100'000 (1832-1864), selon une projection conique équivalente dite **projection de Bonne** (mathématicien français du XVIII<sup>ème</sup> siècle).

Actuellement, toutes les données topographiques ainsi que les nouvelles Cartes nationales dépendent d'une projection conforme adoptée en 1903, appelée **projection Suisse**.

#### 2.3.1. Définition

Le système, qui est à la base des nouvelles triangulations et cartographie de la Suisse (1903), est une **double projection conforme, cylindrique à axe oblique**.

La surface de référence choisie est l'**ellipsoïde de Bessel (1880)** :

$$\begin{aligned} a &= 6'377'397,155 \\ b &= 6'356'078,963 \end{aligned}$$

Le point central de la projection est situé à l'ancien observatoire de Berne :

Latitude :  $B = 46^\circ 57' 08,66''$  N  
 Longitude :  $L = 7^\circ 26' 22,50''$  E  
 $= 0^\circ 29' 45,5s$  E (système horaire)

L'ellipsoïde est placé tangent au géoïde au point central (la normale à l'ellipsoïde y est confondue avec la verticale).

Il y a d'abord une projection conforme de l'ellipsoïde sur une sphère qui lui est osculatrice, puis une projection conforme de cette sphère sur un cylindre dont l'axe est oblique par rapport à l'axe de la Terre. Le développement de ce cylindre donne le plan (Figure 4-11).

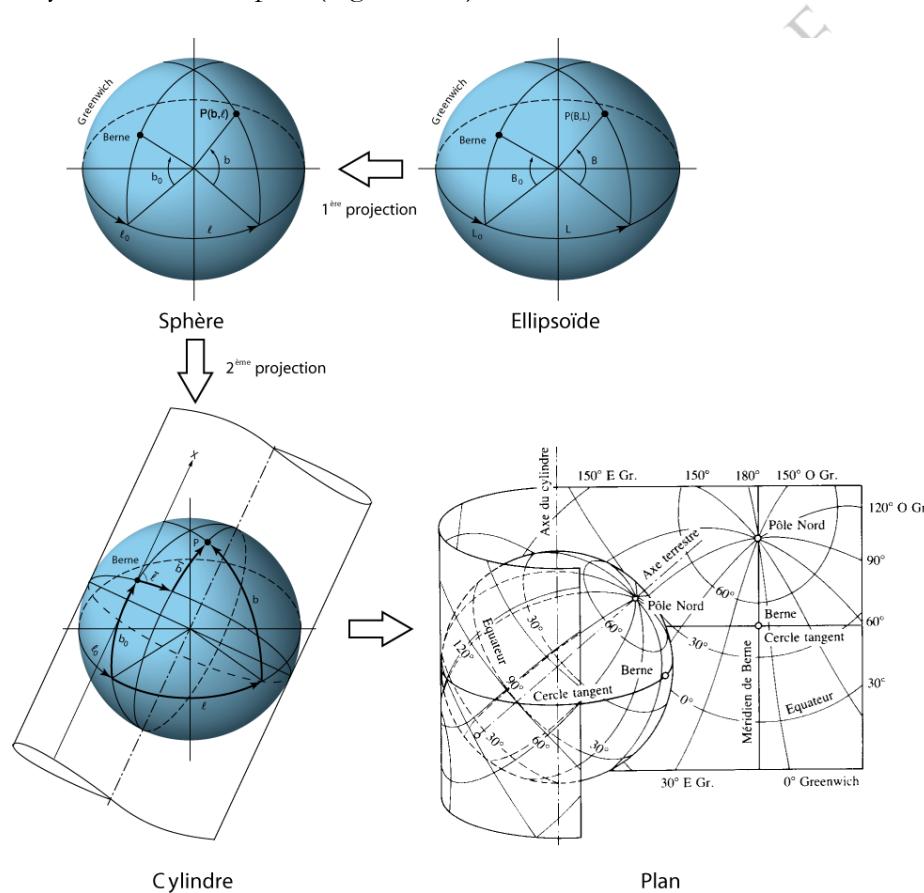


Figure 2-11 : La projection suisse

Pour distinguer les coordonnées géographiques du cas général  $(\varphi, \lambda)$ , dans le cadre de la projection suisse, on les désigne volontiers par **B** (pour Breite) et **L** (pour Länge), respectivement **b** et **λ**.

**(B, L)** : coordonnées géographiques sur l'ellipsoïde  
**(b, λ)** : coordonnées géographiques sur la sphère

La projection de l'ellipsoïde sur la sphère est définie par des fonctions :

$$b = f_1(B) \quad \text{et} \quad \lambda = f_2(L)$$

choisies pour que la projection soit conforme et pour que les déformations linéaires soient aussi petites que possible ; elles sont au plus de 1 mm pour 10 km.

La sphère est celle de courbure moyenne, dont le rayon vaut :

$$r = 6378,816 \text{ km}$$

La projection conforme de la sphère dans le plan est une projection de Mercator oblique ; le cylindre est tangent à la sphère le long du grand cercle passant par Berne et perpendiculaire au méridien de Berne.

### 2.3.2. Coordonnées rectangulaires planes

En développant le cylindre, on obtient deux droites perpendiculaires entre elles qui définissent le système de coordonnées dans le plan de projection : l'image du cercle de contact donne l'axe **y** ; l'image du méridien de Berne donne l'axe **x** orienté au Nord (Figure 4-12).

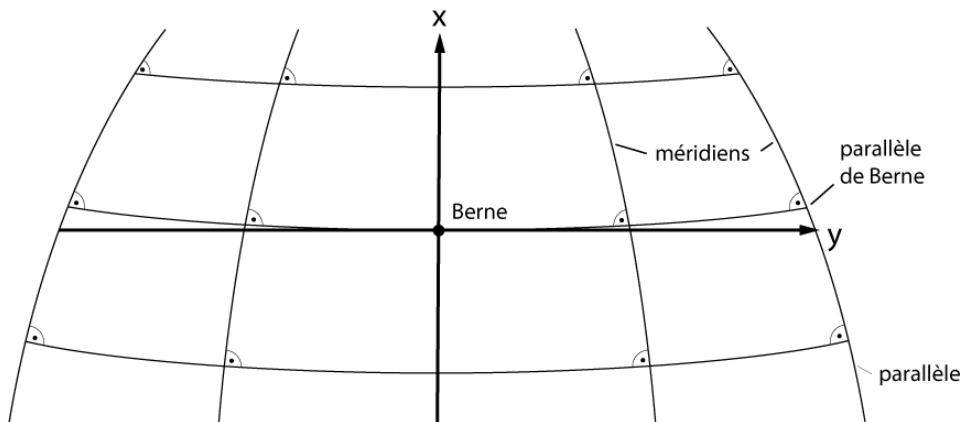


Figure 2-12 : Le système de coordonnées suisses avec leur origine à Berne"

Les autres **méridiens** que celui de Berne se projettent suivant des courbes dont la courbure s'accentue en s'éloignant vers l'Est ou l'Ouest depuis Berne ; l'image des **parallèles** est faite de courbes perpendiculaires aux méridiens (projection conforme).

L'origine est à Berne, mais on a introduit une **translation de l'origine** de 600 km vers l'Ouest et de 200 km vers le Sud. Ainsi on a défini :

$$Y = y + 600 \text{ km} \text{ et } X = x + 200 \text{ km.}$$

Par ces translations, on réalise les avantages suivants :

- pour l'ensemble du pays les coordonnées sont toujours positives ;
- la plus petite valeur **Y** est plus grande que la plus grande valeur **X**.

Ces  **coordonnées rectangulaires planes** sont appelées aussi  **coordonnées nationales**.

**Attention !**

Par convention, on a en Suisse :

**Y en abscisse, croissant d'Ouest en Est**

**X en ordonnée, croissant du Sud au Nord**

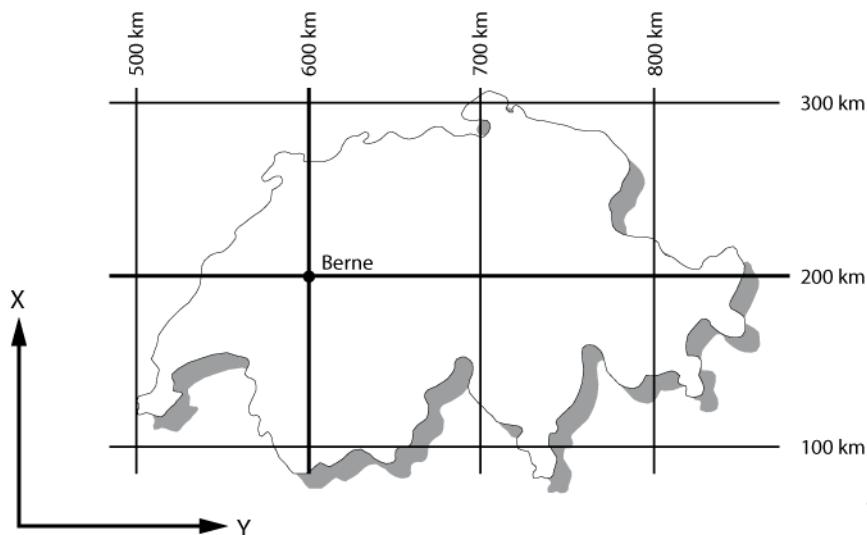


Figure 2-13 : Le système de coordonnées suisses "nationales" ou "militaires"

Dans ce système, la Suisse a pour coordonnées limites :

$$\begin{aligned} 484 \text{ km} < Y &< 834 \text{ km} \\ 74 \text{ km} < X &< 296 \text{ km} \end{aligned}$$

Les coordonnées s'énoncent toujours dans l'ordre Y, X et elles sont normalement exprimées en mètres avec deux décimales :

Exemple :

$$\begin{aligned} \text{EPFL - Ecublens} \\ Y = 533'154,13 \text{ m} & \quad X = 152'548,06 \text{ m} \end{aligned}$$

Les calculs liés à la projection suisse sont un peu plus simples si l'on exprime les coordonnées planes sans translation de l'origine, c'est-à-dire avec  $y = Y - 600 \text{ km}$  et  $x = X - 200 \text{ km}$ , donc avec  $y = x = 0$  à Berne. Parfois, les coordonnées y, x sont appelées **civiles** et Y, X **militaires**, mais cet usage tend à disparaître.

Avec la rénovation du système géodésique suisse (CH1903+), on a introduit un nouveau cadre de coordonnées MN95 qui diffère quelques peu (1 à 2 m) de la réalisation MN03. Afin de distinguer ces deux cadres de coordonnées, on introduit une translation supplémentaire pour MN95.

$$Y_{MN95} = y + 2'600 \text{ km} \text{ et} \quad X_{MN95} = x + 1'200 \text{ km}.$$

### 2.3.3. Convergence du méridien

La **convergence du méridien**  $\mu$  est l'angle compris entre le méridien et une parallèle à l'axe des X.

C'est l'azimut de la direction du Nord de la carte. Comme c'est un angle petit, il est exprimé positivement ou négativement selon le cas.

Dans la projection suisse, on a

- $\mu = 0$  pour tous les points situés sur le méridien de Berne
- $\mu > 0$  si l'on est à l'est de ce méridien
- $\mu < 0$  si l'on est à l'ouest de ce méridien

Les valeurs extrêmes pour la Suisse sont :

- |             |       |                      |         |
|-------------|-------|----------------------|---------|
| - à l'est   | $\mu$ | = + 2,3° (+ 2,6 gon) | Grisons |
| - à l'ouest | $\mu$ | = - 1,1° (- 1,2 gon) | Genève  |

La Figure 4-14 récapitule les différentes directions de référence du Nord, les angles compris entre elles, et les angles d'orientation.

Il en découle les relations suivantes, les différents angles étant à prendre avec leur signe :

$$\text{Azimut magnétique : } a_m = a - \delta_m$$

On trouve en marge de toutes les cartes nationales au 1:25'000 et 1:50'000 la valeur de la correction totale **déclinaison et convergence du méridien**, valable pour le milieu de la carte à une date donnée, ainsi que la variation annuelle.

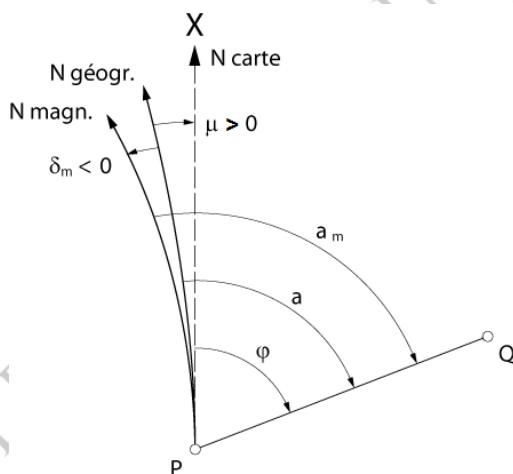


Figure 2-14 : Les différentes directions de référence du Nord

### 2.3.4. Conversion de coordonnées planes et géographiques

On trouve les développements théoriques et les formules relatives à la projection suisse dans des ouvrages de référence. Pour un calcul rigoureux, il faut utiliser les formules qui y sont décrites. On donne ici des **formules simplifiées** qui permettent la conversion avec une précision suffisante pour certains usages.

Rappelons les désignations avec les unités qu'elles ont dans les formules qui suivront :

- $L''$  = longitude E de Greenwich, en secondes sexagésimales
- $B''$  = latitude, en secondes sexagésimales
- $y, x$  = coordonnées planes civiles, en mètres

En Suisse :

- $1''$  en latitude correspond à  $\approx 31$  m le long d'un méridien
- $1''$  en longitude correspond à  $\approx 21$  m le long d'un parallèle

Les données de base suivantes permettent d'effectuer les calculs de transformation de coordonnées entre  $(B_0, L_0)$  et  $(y, x)$  (ou  $(Y, X)$ ) :

Latitude du point central de la projection :  $B_0 = 46^\circ 57' 08,66''$

$$B_0 = 169'028,66''$$

Longitude du point central de la projection :  $L_0 = 7^\circ 26' 22,50''$

$$L_0 = 26'782,50''$$

Coordonnées planes nationales (militaires) :  $Y = y + 600'000$  m

$$X = x + 200'000$$
 m

### 2.3.5. Conversion de $y, x$ en $L, B$

Les formules donnent  $L, B$  à  $\approx 1''$  près. Cela équivaut à connaître  $y, x$  à  $\approx 30$  m près.

#### Calcul de $B$ latitude Nord

$$B'' = 169029 + 3,239 \cdot 10^{-2} \cdot x - 2,714 \cdot 10^{-9} \cdot y^2$$

Pour avoir  $B$  (degrés et parties décimales du degré), diviser  $B''$  par 3600.

#### Calcul de $L$ longitude Est de Greenwich

$$L'' = 26783 + 4,730 \cdot 10^{-2} \cdot y + 7,926 \cdot 10^{-9} \cdot y \cdot x$$

Pour avoir  $L$  (degrés et parties décimales du degré), diviser  $L''$  par 3600.

### 2.3.6. Conversion de $L, B$ en $y, x$

Les formules donnent  $y, x$  à  $\approx 50$  m près si l'on connaît  $B, L$  à  $1''$  près. Il faut d'abord calculer la longitude réduite  $\lambda$  et la latitude réduite  $\varphi$  en secondes (''') :

$$\lambda'' = L'' - 26'783'' \quad \varphi'' = B'' - 169'029''$$

#### Calcul de $y$ en mètres

$$y = + 21,143 \cdot \lambda - 1,094 \cdot 10^{-4} \cdot \lambda \cdot \varphi - 4,423 \cdot 10^{-11} \cdot \lambda^3$$

#### Calcul de $x$ en mètres

$$x = + 30,877 \cdot \varphi + 3,745 \cdot 10^{-5} \cdot \lambda^2 - 1,937 \cdot 10^{-10} \cdot \lambda^2 \cdot \varphi$$

### 2.3.7. Calcul de la convergence du méridien

La valeur de la convergence du méridien varie d'un lieu à un autre ; elle dépend donc des coordonnées de ce lieu. On donne ci-dessous une formule qui permet de la calculer à partir des coordonnées rectangulaires planes civiles ( $y, x$ ).

$\mu$  = convergence du méridien, en gons

$y, x$  = coordonnées planes civiles, en mètres

La formule permet d'obtenir  $\mu$  à 1<sup>mgon</sup> près si on connaît y, x à 10 m près.

#### Calcul de $\mu$ en gon

$$\begin{aligned}\mu^{\text{gon}} = & +1,06680 \cdot 10^{-5} \cdot y + 1,788 \cdot 10^{-12} \cdot y \cdot x \\ & - 1,4 \cdot 10^{-19} \cdot y^3 + 4,3 \cdot 10^{-19} \cdot y \cdot x^2\end{aligned}$$

Pour avoir  $\mu^\circ$  (degrés et parties décimales du degré), multiplier  $\mu^{\text{gon}}$  par 0,9.

#### 2.3.8. Déformation linéaire

La déformation linéaire dépend essentiellement de l'éloignement par rapport à l'axe **X = 200** (axe neutre non déformé). La projection de la sphère dans le plan a pour effet un allongement des longueurs. En introduisant les désignations :

- $s_0$  : distance sphérique au niveau de la mer
- $\bar{s}$  : distance projetée dans le plan de projection (Y, X) déformée
- x : coordonnée civile moyenne du côté de longueur s
- r : rayon de la sphère terrestre (= 6 378,8 km)

On a la relation :

$$s_0 = \bar{s} - \delta_x$$

La correction  $\delta_x$  exprimée en mètres pour un côté de 1 km est :

$$\delta_x [m] = 1000m \frac{x^2}{2r^2} = 1000m \frac{(X [km] - 200)^2}{2.6379^2} = 1.23 \cdot 10^{-5} \cdot (X [km] - 200)^2$$

Ainsi, la correction de déformation linéaire en mm par km est :

$$\delta_x [ppm] = 1.23 \cdot 10^{-2} \cdot (X [km] - 200)^2$$

et les relations pour calculer la distance au niveau de la mer en fonction de la distance plane et réciproquement sont :

$$\begin{aligned}s_0 &= \bar{s} \cdot (1 - \delta_x [ppm] \cdot 10^{-6}) \\ \bar{s} &= s_0 \cdot (1 + \delta_x [ppm] \cdot 10^{-6})\end{aligned}$$

Le Tableau 4-1 donne la valeur de  $\delta_x$  pour quelques éloignements par rapport à l'axe neutre.

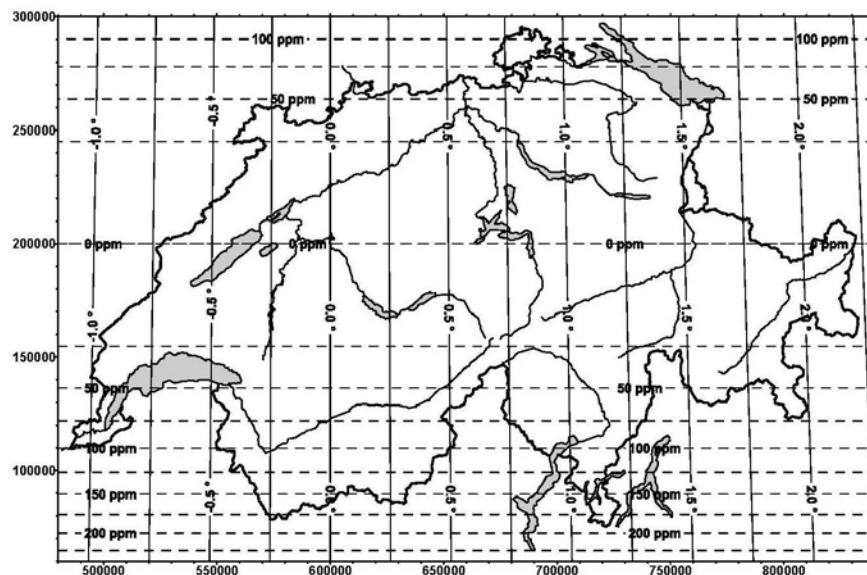
(X - 200) [km]	$\delta_x$ [mm/km]
0	0
$\pm 25$	8
$\pm 50$	31
$\pm 100$	123
$\pm 125$ (Sud Tessin)	192

Tableau 2-1 : Les déformations linéaires

A l'EPFL - Ecublens :

$$X = 152.55 \text{ km} \rightarrow \delta x = 28 \text{ mm/km.}$$

La déformation linéaire n'est pas négligeable : on doit en tenir compte dans les applications topométriques qui font intervenir des distances mesurées dans le terrain et que l'on doit utiliser dans le plan (Y, X) pour des calculs.



Représentation de la convergence des méridiens (en degrés) et de l'altération linéaire (pointillés, en ppm)

Figure 2-15 : Carte de la Suisse avec les valeurs de la convergence du méridien et de la déformation linéaire  
Source : © swisstopo

### 2.3.9. Exemple

EPFL - Ecublens

Coordonnées nationales :  $Y = 533\ 155 \text{ m}$  et  $X = 152\ 553 \text{ m}$

Longitude L :  $L'' = 23646''$   
 $L^\circ = 6,5683^\circ = 6^\circ 34' 06'' \text{ E}$  ou  $0^h 26^m 16,4^s \text{ E}$

Latitude B :  $B'' = 167480''$   
 $B^\circ = 46,5222^\circ = 46^\circ 31' 20'' \text{ N}$

Convergence du méridien :  $\mu^{\text{gon}} = -0,708^{\text{gon}}$   
 $\mu^\circ = -0^\circ 38' 12''$

Notes :

ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

### 3. Références

On donne ici quelques références bibliographiques utiles et complémentaires au contenu de ce polycopié. Cette liste n'est de loin pas exhaustive.

#### Références géodésiques

Dufour J-P., (2001), Introduction à la géodésie, Ed. Hermès Science Publication

Swisstopo, (2009), Définition de la nouvelle mensuration nationale de la Suisse « MN95 », rapport 21, 2009

#### Projections et cartographie

Yang Q.H. et al, (2000), Projection transformation : principles and applications, Ed. Taylor & Francis

Le Fur A., (2007), Pratiques de la cartographie, 2<sup>ème</sup> édition, Ed. Armand Colin

Weger G., (1999), Sémiologie graphique et conception et conception cartographique, école nationale des sciences géographiques.

Darteyre JP, (2008), Cours de cartographie, école nationale des sciences géographiques.

## 4. Table des figures

### Avertissement

*La plupart des figures de ce polycopié ont été créées à l'EPFL. Toutefois, les auteurs ont utilisé un certain nombre de ressources dont les références sont citées. Si l'une ou l'autre de ces ressources ne sont pas référencées correctement ou font l'objet d'un droit d'usage particulier, nous vous prions de bien vouloir le signaler à l'auteur.*

Figure 1-1 : Première détermination du rayon terrestre par Eratosthène 250 ans avant J.C.....	5
Figure 1-2 : Chaîne de triangles.....	6
Figure 1-3 : Premier réseau géodésique mondial obtenu par triangulation spatiale .....	8
Figure 1-4 : Orbites polaires des cinq satellites du système de TRANSIT.....	8
Figure 1-5 : Le géoïde .....	10
Figure 1-6 : Nouveau réseau de points fixes du cadre de coordonnées Suisse MN95 .....	11
Figure 1-7 : Schéma d'un marégraphe .....	12
Figure 1-8 : Réseau principal de nivellation en Suisse. ....	13
Figure 1-9 : Carte du géoïde mondial, modèle EGM96 (source NASA) Variations exprimées en m .....	14
Figure 1-10 : L'ellipsoïde de révolution.....	15
Figure 1-11 : Forme en poire du géoïde.....	16
Figure 1-12 : Lignes de coordonnées .....	18
Figure 1-13 : Les coordonnées sur la sphère.....	19
Figure 1-14 : Les coordonnées sur l'ellipsoïde .....	19
Figure 1-15 : La déviation de la verticale .....	20
Figure 1-16 : Ellipsoïde global - ellipsoïde local (B : latitude du lieu) .....	21
Figure 1-17 : Les méridiens et azimuts.....	24
Figure 1-18 : La déclinaison magnétique .....	24
Figure 1-19 : Variation journalière de la direction du Nord magnétique par rapport à sa moyenne .....	25
Figure 1-20 : La cote du géoïde (N).....	25
Figure 1-21 : Carte du géoïde en Suisse, variations exprimées en m .....	26
Figure 2-1 : Classification des projections .....	28
Figure 2-2 : La projection conique.....	29
Figure 2-3 : Développement du cône de projection .....	30
Figure 2-4 : Projection de Ptolémée (2 <sup>ème</sup> siècle après J.C.).....	30
Figure 2-5 : Altération linéaire des systèmes de projection en France.....	31
Figure 2-6 : Les projections gnomonique et stéréographique .....	32
Figure 2-7 : La carte plate rectangulaire .....	33
Figure 2-8 : Carte résultant de la projection Mercator.....	34
Figure 2-9 : Loxodromie et orthodromie projetées selon Mercator .....	35
Figure 2-10 : Numérotation des fuseaux et des secteurs de la projection UTM.....	36
Figure 2-11 : La projection suisse .....	37

Figure 2-12 : Le système de coordonnées suisses avec leur origine à Berne" .....	38
Figure 2-13 : Le système de coordonnées suisses "nationales" ou "militaires" .....	39
Figure 2-14 : Les différentes directions de référence du Nord.....	40
Figure 2-15 : Carte de la Suisse avec les valeurs de la convergence du méridien et de la déformation linéaire .....	43

ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
FÉDÉRALE DE LAUSANNE