Complément du cours : **des paramètres aux conditions**

Introduction

Pour un problème donné, on a souvent plusieurs options pour définir les paramètres, même pour ajuster une droite.

Sur un diagramme avec t (temps) en abscisse et y (débit) en ordonnée, on a reporté n observations presque alignées. On recherche les valeurs t_{min} et t_{max} correspondant aux valeurs spécifiées y_{min} et y_{max} . Deux options sont comparées ci-dessous. Pour simplifier les expressions, on considère ici $n=3$.

1. Paramètres classiques pour la droite

$$\begin{cases} y_1 = a + b \cdot t_1 \\ y_2 = a + b \cdot t_2 \\ y_3 = a + b \cdot t_3 \end{cases}$$

Ce modèle est linéaire par rapport à a et à b.

Obtenir $\hat{a}$ et $\hat{b}$, ainsi que leurs cofacteurs, est évident. Toutefois il faut calculer ensuite $\hat{t}_{min} = \dfrac{y_{min} - \hat{a}}{\hat{b}}$ et $\hat{t}_{max} = \dfrac{y_{max} - \hat{a}}{\hat{b}}$. Surtout, il faut calculer leurs cofacteurs par propagation de ceux de $\hat{a}$ et $\hat{b}$, contenus dans $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$.

Maintenant éliminons a en faisant des différences entre les équations.

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = b \cdot (t_2 - t_1) \\ y_3 - y_2 = b \cdot (t_3 - t_2) \end{cases}$$

Ensuite, éliminons b en faisant des quotients.

$$\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{y_3 - y_2}{t_3 - t_2}$$

Cette équation dépourvue de paramètres exprime la condition d'alignement des 3 points.

2. Paramètres alternatifs pour la droite

Puisque l'on recherche les valeurs t_{min} et t_{max} , on en fait les paramètres du problème.

$$\begin{cases} y_1 = y_{min} + (t_1 - t_{min}) \cdot \dfrac{y_{max} - y_{min}}{t_{max} - t_{min}} \\ y_2 = y_{min} + (t_2 - t_{min}) \cdot \dfrac{y_{max} - y_{min}}{t_{max} - t_{min}} \\ y_3 = y_{min} + (t_3 - t_{min}) \cdot \dfrac{y_{max} - y_{min}}{t_{max} - t_{min}} \end{cases}$$

Attention : ce modèle n'est pas linéaire par rapport à t_{min} et t_{max} !

La résolution est moins évidente, mais elle livre directement $\hat{t}_{min}$ et $\hat{t}_{max}$. Surtout, leurs cofacteurs sont déjà contenus dans $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$.

Pour éliminer les paramètres, on peut faire des différences entre les équations.

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = (t_2 - t_1) \cdot \dfrac{y_{max} - y_{min}}{t_{max} - t_{min}} \\ y_3 - y_2 = (t_3 - t_2) \cdot \dfrac{y_{max} - y_{min}}{t_{max} - t_{min}} \end{cases}$$

Ensuite, on élimine la pente $\dfrac{y_{max} - y_{min}}{t_{max} - t_{min}}$ commune aux 2 équations.

$$\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{y_3 - y_2}{t_3 - t_2}$$

On trouve exactement la même condition d'alignement des 3 points qu'auparavant.

Le choix des paramètres se limite à la forme. Si on les supprime, on trouve toujours les mêmes conditions, ce qui souligne leur nature fondamentale, inhérente au problème.

Extension pour une droite ajustée sur n points

Il y a deux niveaux de choix.

1. Exprimer $n-2$ conditions ou n équations avec 2 paramètres.
   Ce choix influence la taille des matrices, notamment celle de la matrice à inverser, respectivement $(n-2) \times (n-2)$ ou 2×2 . Toutefois cet aspect est mineur si l'on dispose d'un ordinateur.
2. Dans le second cas, il faut encore choisir les 2 paramètres.
   Ce choix influence le modèle fonctionnel, qui peut notamment devenir linéaire ou non. A nouveau, cet aspect est mineur si l'on dispose d'un ordinateur.

Pour de nombreux problèmes, les conditions sont difficiles à établir et mieux vaut lier les observations via des paramètres communs. De plus le choix de paramètres judicieux permet de modéliser directement l'effet de certains phénomènes, par exemple une constante d'addition ou un facteur d'échelle. Ces raisons favorisent nettement la compensation paramétrique, au point que l'application de la compensation conditionnelle est souvent négligée, même lorsque les observations compensées constituent le principal résultat souhaité.

Et au delà du modèle de compensation…

Quel que soit le choix du modèle, l'évaluation de son adéquation aux observations passe par l'analyse des résidus compensés, globale d'abord et locale ensuite.