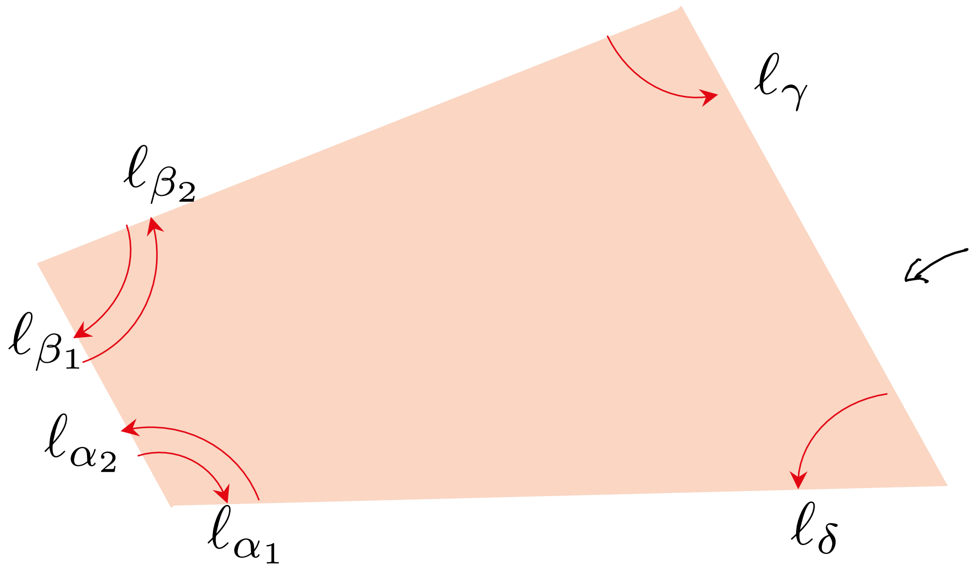
Exemple - Quadrilatère



min 3 obs. ∄
pour résoudre
le quadrilatère

- Observations

  $\alpha\ 2\times,\ \beta\ 2\times,\ \gamma,\ \delta \quad = 6\ . = n$

  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_\delta = \sigma_a$

- Solution(s)

  A. Proposez vous-même (en group de 3 ou 2)

  B. Montrez-le au tableau

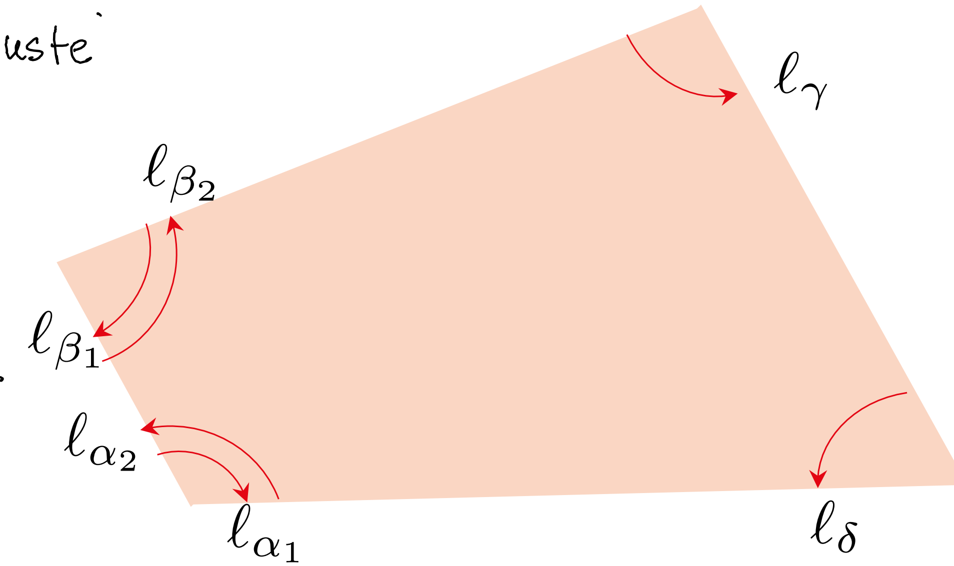
Poser le problème

1. Surdétermination, r = ? $(n-3) = \underline{\underline{3}}$
2. Choix des conditions, w = ?
3. Modèle stochastique = ?

- Indications
  - Quels sont les poids d'α et β bêta par rapport à γ et δ ?

Exemple - Quadrilatère

Solution (juste mais pas optimale) par la moyenne des $\alpha_{1,2}$; $\beta_{1,2}$



$$\alpha\ 2\times,\ \beta\ 2\times,\ \gamma,\ \delta$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_\delta = \sigma_a$$

$$\boxed{\bar\alpha \quad \bar\beta \quad \gamma,\ \delta}$$

- Indications
  - Quels sont les poids d'α et β bêta par rapport à γ et δ ?

$$\bar\ell_\alpha = \frac{1}{2}\ell_{\alpha_1} + \frac{1}{2}\ell_{\alpha_2} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ell_{\alpha_1}\\ \ell_{\alpha_2}\end{bmatrix}$$

$$\sigma^2_{\bar\ell_\alpha} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\sigma^2_{\alpha_1} & \\ & \sigma^2_{\alpha_2}\end{bmatrix}}_{I}\begin{bmatrix}1/2\\ 1/2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\sigma^2_{\alpha}$$

$$P_{\bar\ell_\alpha} = \frac{1}{\sigma^2_{\bar\ell_\alpha}} = 2\times P_{\alpha}$$

- Procédé
  - exprimer le modèle *fonctionnel*
  - exprimer le modèle *stochastique*

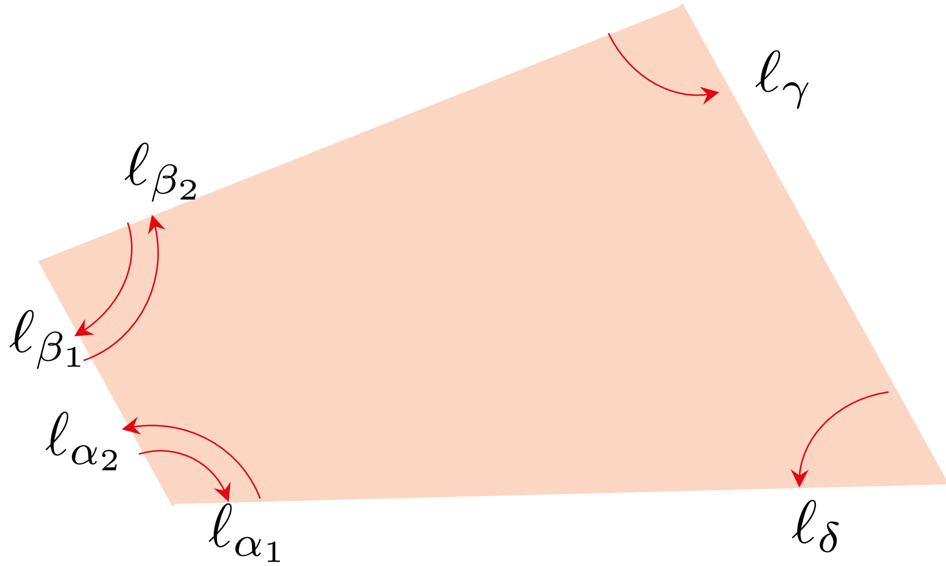
détails dans „quadri_condi.py" sur Moodle

après la moyenne $n \to 4$
$r = n-3 = 1$

$$Q = \begin{bmatrix}0.5 & & & \\ & 0.5 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix} \qquad \ell = \begin{bmatrix}\ell_{\bar\alpha}\\ \ell_{\bar\beta}\\ \ell_\gamma\\ \ell_\delta\end{bmatrix}$$

$$\ell_{\bar\alpha} + \ell_{\bar\beta} + \ell_\gamma + \ell_\delta - 400 - v_{\bar\alpha} - v_{\bar\beta} - v_\gamma - v_\delta = 0$$

Exemple - Quadrilatère



α $2\times$, β $2\times$, γ, δ

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_\delta = \sigma_a$$

$$\ell^T = [\ell_{\alpha_1}\ \ell_{\alpha_2}\ \ell_{\beta_1}\ \ell_{\beta_2}\ \ell_\gamma\ \ell_\delta]$$

I. Modèle fonctionnel (option)

$$\check{\ell}_{\alpha_1} + \check{\ell}_{\beta_1} + \check{\ell}_\gamma + \check{\ell}_\delta - 400 = 0$$

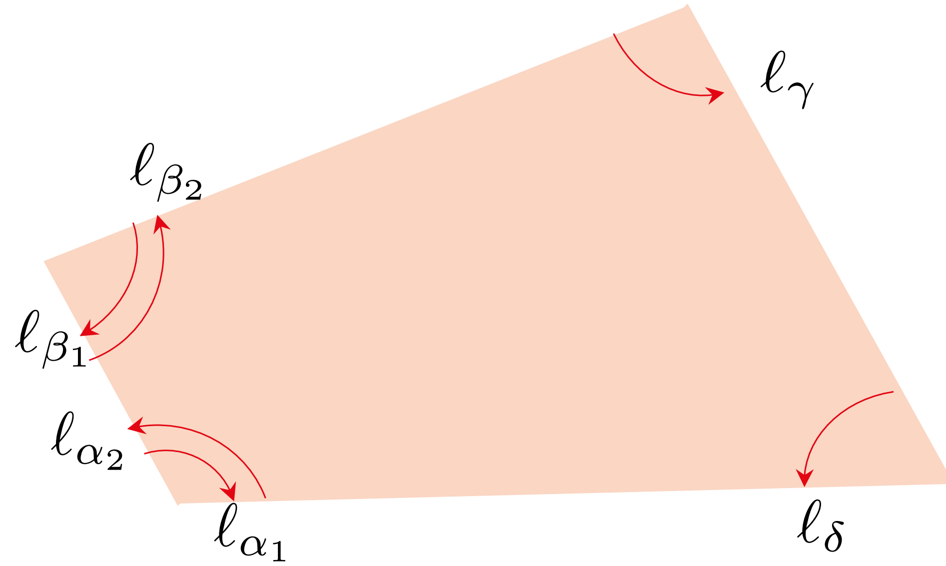
$$\check{\ell}_{\alpha_1} - \check{\ell}_{\alpha_2} = 0$$

$$\check{\ell}_{\beta_1} - \check{\ell}_{\beta_2} = 0$$

- $\mathbf{B}_{\mathrm{I}}$.

$$B_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\alpha_1} \\ v_{\alpha_2} \\ v_{\beta_1} \\ v_{\beta_2} \\ v_\gamma \\ v_\delta \end{bmatrix}$$

Exemple - Quadrilatère



α 2×, β 2×, γ, δ

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_\delta = \sigma_a$$

$$\ell^T = [\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_1\ \beta_2\ \gamma\ \delta]$$

II. Modèle fonctionnel (option)

- $\mathbf{B}_{II.}$

$$(\ell_{\alpha_1} - v_{\alpha_1}) + (\ell_{\beta_1} - v_{\beta_1}) + (\ell_\gamma - v_{\ell\gamma}) + (\ell_\delta - v_{\ell\delta}) - 400 = 0$$

$$(\ell_{\alpha_1} - v_{\alpha_1}) + (\ell_{\beta_2} - v_{\beta_2}) + (\ell_\gamma - v_\gamma) + (\ell_\delta - v_\delta) - 400 = 0$$

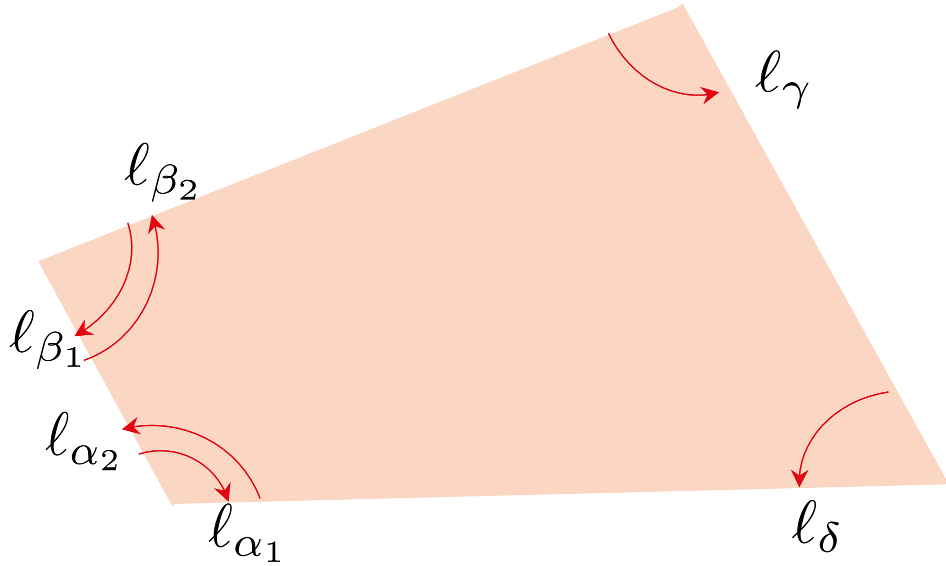
$$(\ell_{\alpha_2} - v_{\alpha_2}) + (\ell_{\beta_2} - v_{\beta_2}) + (\ell_\gamma - v_\gamma) + (\ell_\delta - v_\delta) - 400 = 0$$

$$B_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v_{\alpha_1} \\ v_{\alpha_2} \\ v_{\beta_1} \\ v_{\beta_2} \\ v_\gamma \\ v_\delta \end{bmatrix}$$

Exemple - Quadrilatère

$\alpha\ 2\times,\ \beta\ 2\times,\ \gamma,\ \delta$

$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_\delta = \sigma_a$



III. Modèle fonctionnel (option) fausse !

- $\mathbf{B}_{\mathrm{III.}}$

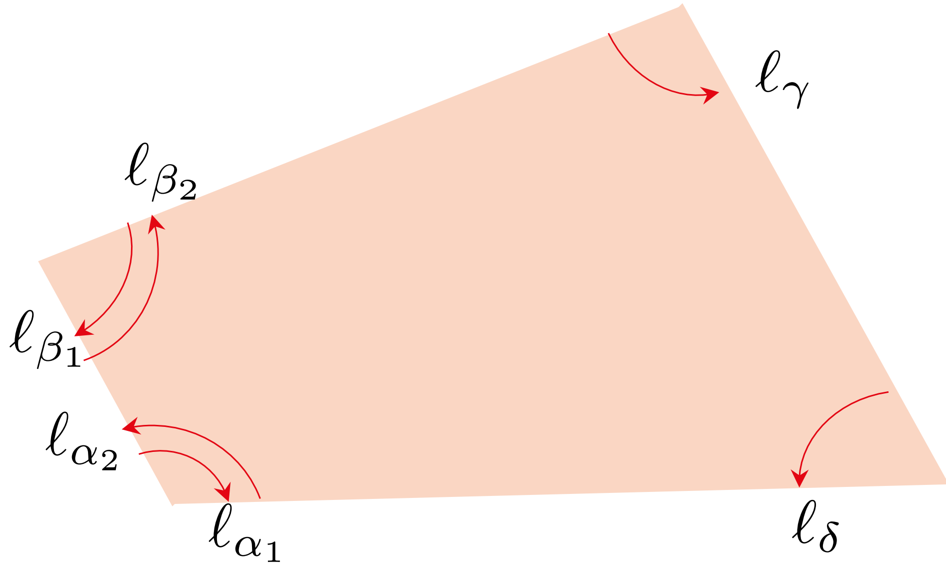
p. ex.

$$\frac{1}{2}\ell_{\alpha_1} + \frac{1}{2}\ell_{\alpha_2} + \frac{1}{2}\ell_{\beta_1} + \frac{1}{2}\ell_{\beta_2} + \ell_\gamma + \ell_\delta = 0$$

– pourquoi faux ?

- les observations ℓ_{α_1} et ℓ_{α_2} sont pas la même valeur !
- idem pour ℓ_{β_1} et ℓ_{β_2}
- or $v_{\alpha_1} \neq v_{\alpha_2}$ & $v_{\beta_1} \neq v_{\beta_2}$

Exemple - Quadrilatère

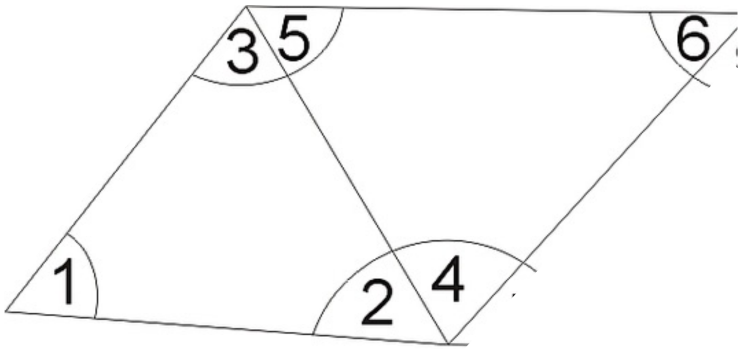


$\alpha\ 2\times,\ \beta\ 2\times,\ \gamma,\ \delta$

$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \sigma_\delta = \sigma_a$

- Exemple numérique
  - Moodle – `quadri_condi.py`
  - 3 solutions
    - Via moyenne $\bar{\alpha},\ \bar{\beta},\ \gamma,\ \delta$, optimale?
    - Direct (une d'option possible)
    - Direct, d'avantage de conditions ?

ME – Exercice : Quadrilatère



- Angles des précision inégale
- Options
  - A) pondération des mesures répétées $(r = 1\,,\,\mathbf{P}_{4x4})$
  - B) combinaison directe des mesures brutes $(r = 1\,,\,\mathbf{P} = \mathbf{I}_6)$
  - C) idem, les répétitions en plus $(r = 3\,,\,\mathbf{P} = \mathbf{I}_6)$
  - D) solution simple et élégante $(r = 3\,,\,\mathbf{P} = \mathbf{I}_6)$
  - E) condition redondante $(r = 4\,,\,\mathbf{P} = \mathbf{I}_6)$ $\longrightarrow$ boum!

- Avantages, inconvénients, fautes …
- Code *Python* commenté

- Distinguer le modèle *fonctionnel* et le modèle *stochastique*
- Exprimer toute l'information de façon explicite