Moyenne pondérée - continuation

> But: Démontrer la formulation de moyenne pondérée avec variance minimale et obtenir la *relation* entre le *poids* et la *variance*.

Lorsque l'on insére les valeurs dérivées de p_a et p_b dans l'équation (2): $\sigma_{\hat{m}}^2 = p_a^2\sigma_a^2 + p_b^2\sigma_b^2$, on obtient:

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = \left(\frac{\sigma_b^2}{\sigma_a^2+\sigma_b^2}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_a^2}{\sigma_a^2+\sigma_b^2}\right)^2 \sigma_b^2$$

On simplifie la relation précedente comme suit:

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = \frac{\sigma_b^4\cdot\sigma_a^2 + \sigma_a^4\cdot\sigma_b^2}{\left(\sigma_a^2+\sigma_b^2\right)^2} = \frac{\sigma_a^2\,\sigma_b^2\left(\sigma_a^2+\sigma_b^2\right)}{\left(\sigma_a^2+\sigma_b^2\right)^2} = \frac{\sigma_a^2\,\sigma_b^2}{\left(\sigma_a^2+\sigma_b^2\right)}$$

En rappelant que $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$, on obtient le poids de la moyenne estimée $\hat{m} = p_a\ell_a + p_b\ell_b$ à partir de la relation précédente:

$$\boxed{p_m = \frac{1}{\sigma_{\hat{m}}^2}} = \frac{\sigma_a^2+\sigma_b^2}{\sigma_a^2\,\sigma_b^2} = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_b^2\,\sigma_b^2} + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_a^2\,\sigma_b^2} = \frac{1}{\sigma_a^2} + \frac{1}{\sigma_b^2} \boxed{= p_a + p_b} \tag{3}$$

En d'autres termes, l'équation (3) s'interprète de la manière suivante:

- **Le poids de la moyenne pondérée est inversement proportionnel à sa variance.**
- **Le poids de la moyenne pondérée est égal à la somme des poids de ses composantes.**[1]

La somme des poids est-elle toujours égal à 1?

Il s'agit d'un choix arbitraire. Si $p_a + p_b \neq 1$ il faut calculer la moyenne pondérée avec la normalisation du poids. Exemple avec 3 variables *indépendantes*:

$$\hat{m} = \frac{p_a}{(p_a+p_b+p_c)}\ell_a + \frac{p_b}{\sum p_i}\ell_b + \frac{p_c}{\sum p_i}\ell_c \tag{4}$$

ce qui, pour la variance de la moyenne pondérée, donne

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = \left(\frac{p_a}{\left(\sum p_i\right)^2} + \frac{p_b}{\left(\sum p_i\right)^2} + \frac{p_c}{\left(\sum p_i\right)^2}\right)\cdot\sigma_0^2 = \frac{\sum p_i}{\left(\sum p_i\right)^2}\cdot\sigma_0^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sum p_i} \tag{5}$$

Indépendence à σ_0^2

Dans le cas où le σ_0^2 est quelconque, la propagation de la variance pour la moyenne pondérée donne $\sigma_{\hat{m}}^2 = \mathbf{K}_{\hat{m}} = \mathbf{F}\sigma_0^2\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{F}^T$. En déplaçant σ_0^2 sur le côté gauche de l'équation et en utilisant la définition des poids, on obtient $\mathbf{P}_m = \left(\frac{1}{\sigma_0^2}\mathbf{K}_{\hat{m}}\right)^{-1}$ or $p_m = \sigma_0^2/\sigma_{\hat{m}}^2$. En substituant la relation (5) à la place de $\sigma_{\hat{m}}^2$, on obtient: $p_m = \sigma_0^2/\left(\sigma_0^2/\sum p_i\right) = \sum p_i$, confirmant l'affirmation de la note de bas de page mentionnée précédemment.

Remarques

Attention: Les relations dérivées de la moyenne pondérée ne sont valables que pour les variables *indépendantes*!

Perspectives: La prochaine fois, nous examinerons *l'influence des corrélations* entre trois variables sur la moyenne pondérée. Cela entraîne la nécessité d'utiliser un nouvel estimateur, dont la dérivation sera introduite plus tard (dans le bloc 3).

[1] indépendanment du choix de σ_0^2.