Série no 7: Moindres carrés – calcul symbolique

Dérivation matricielle

On considère deux observations : $\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{T}} = [\ell_1 \, , \, \ell_2]$.

Ces observations sont corrélées, donc on a : $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$ avec $p_{11} \neq p_{22}$ et $p_{12} \neq 0$.

Dans un modèle fonctionnel établi
pour des observations idéales : $f(\check{\boldsymbol{\ell}}) = 0$,

on doit introduire des résidus : $\mathbf{v}^{\mathrm{T}} = [v_1 \, , \, v_2]$

pour y insérer les observations effectives : $f(\boldsymbol{\ell} - \mathbf{v}) = 0$.

a) Etablissez la forme quadratique : $\Omega = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}$

   et formez le vecteur : $\dfrac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Omega}{\partial v_1} & \dfrac{\partial \Omega}{\partial v_2} \end{bmatrix}$.

b) Démontrez que la solution correspond à : $2\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}$.

Moyenne pondérée

Lors du cours, nous avons démontré que, pour des mesures de même type et de même précision, donc pour $\mathbf{K}_{\ell\ell} = \sigma_0^{\,2} \cdot \mathbf{I}_n$, l'estimateur par moindres carrés est la moyenne arithmétique.

Déterminez l'estimateur par moindres carrés pour des mesures de même type, mais de précision inégale, donc de poids différents.

Autrement dit, pour les mesures : $\boldsymbol{\ell}^{\mathrm{T}} = [\ell_1 \, , \, \dots \, , \, \ell_n]$,

le modèle fonctionnel : $\ell_i - v_i = x$

et le modèle stochastique : $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sigma_0^{\,2}/\sigma_1^{\,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_0^{\,2}/\sigma_n^{\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix}$,

montrez que minimiser : $\Omega = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v}$

conduit à la moyenne pondérée : $\hat{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \ell_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$.