Série d'exercices 11 : Gaz parfait - combiné

Synthèse du problème et procédé

Ce problème aborde une approche combinée de compensation pour le problème du gaz parfait des exercices 5 et 6 (comme indiqué pendant les cours et dans le transparent 13-4). L'objectif est de déterminer les corrections optimales pour les observations tout en respectant des conditions entre elles, tout en prenant en compte le paramètre du modèle via une compensation combinée. Il est demandé de suivre le procédé suivant pour cet exercice:

1. Comprendre l'algorithme général présenté ci-dessous,
2. Implémenter la compensation combinée en repartant du code développé pour l'exercice 6 et en l'adaptant pour une compensation combinée (des informations supplémentaires sont données ci-dessous pour vous aider).

Solution au problème combiné

La fonction objectif (conditions avec paramètres)

Le problème de compensation vise à minimiser la fonction objectif suivante :

$$\Omega = \mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v} - 2\mathbf{k}\cdot(\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{A}\partial\mathbf{x} - \mathbf{w}) \longrightarrow \min.$$

Solution de la littérature

Formule de compensation:

$$\delta\hat{\mathbf{x}} = -\left[\mathbf{A}^T\underbrace{(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T)^{-1}}_{\mathbf{P}^*}\mathbf{A}\right]^{-1}\mathbf{A}^T\underbrace{(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T)^{-1}}_{\mathbf{P}^*}\cdot\mathbf{w}.$$

Matrice de covariance des résidus:

$$\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell} - \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\mathbf{A}^T(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}.$$

Simplification

A. Utilisation des matrices auxiliaires $\mathbf{P}^*$ (formule de compensation ci-dessus) et $\mathbf{S}$ (point 6 ci-dessous),

B. $\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}} = \mathbf{S}\cdot(\underbrace{\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T}_{\text{cond. classique}} - \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\mathbf{A}^T}_{\text{apport des paramètres}})\cdot\mathbf{S}^T$

Algorithme pour le modèle combiné

1. Formulation du problème : $f(\check{\ell}, \check{\mathbf{x}}) = 0$.
2. Matrice de covariance : $\mathbf{K}_{\ell\ell} =?$ où $\sigma_0^2 \cdot \mathbf{Q}_{\ell\ell} =?$.
3. Choix des valeurs initiales : $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$.
4. Calcul des écarts : $\mathbf{w} = f(\ell, \overset{\circ}{\mathbf{x}})$.
5. Matrices des dérivées : $\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$, $\mathbf{B} = \frac{\partial f}{\partial \ell}$.
6. Matrice auxiliaire : $\mathbf{S} = \mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\ell\ell}\mathbf{B}^T)^{-1}$.
7. Résidu provisoire : $\overset{\circ}{\mathbf{v}}^* = \mathbf{S} \cdot \mathbf{w}$, et $\mathbf{A}^* = -\mathbf{S}\mathbf{A}$.
8. Covariance des paramètres : $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}^*\mathbf{A})^{-1}$.
9. Correction des paramètres : $\delta\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}\mathbf{A}^*\mathbf{P}^*\overset{\circ}{\mathbf{v}}^*$, et $\hat{\mathbf{x}} = \overset{\circ}{\mathbf{x}} + d\hat{\mathbf{x}}$.
10. Correction des résidus : $\hat{\mathbf{v}} = \overset{\circ}{\mathbf{v}}^* - \mathbf{A}^T d\hat{\mathbf{x}}$, et $\hat{\ell} = \ell - \hat{v}$.
11. Contrôle des calculs : $\hat{\mathbf{w}} = f(\hat{\ell}, \hat{\mathbf{x}}) = 0$.
12. Analyse des résultats : $\mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}}$ (voir simplification B ci-dessus), $\mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}} = \mathbf{Q}_{\ell\ell} - \mathbf{Q}_{\hat{v}\hat{v}}$ et analyse globale et locale (z_i, $\sigma_{\hat{v}_i}$) comme d'habitude.

Taille des matrices et redondance

Pour mieux comprendre l'algorithme, il est essentiel de connaître les tailles des matrices impliquées :

- $\mathbf{w}$, vecteur des écarts de fermeture de taille $m \times 1$, où m représente le nombre de conditions.
- $\mathbf{A}$, matrice des dérivées partielles par rapport aux paramètres de taille $m \times u$, où u est le nombre de paramètres.
- $\mathbf{B}$, matrice des dérivées partielles par rapport aux observations de taille $m \times n$, où n est le nombre total d'observations.
- $\mathbf{K}_{\ell\ell}$, matrice de covariance des observations de taille $n \times n$.

La **redondance** est une mesure de l'excès d'informations disponibles dans le système. Elle est définie par $r = m - u$ et indique combien de conditions supplémentaires peuvent être utilisées pour le contrôle des observations.

Cas particulier de "gaz parfait"

Pour le cas des gaz parfaits, la condition reliant les observations et les paramètres est donnée par :

$$f_i(\ell, x) : \ \frac{P_i V_i}{T_i} - \overset{\circ}{c} = w_i.$$

Les dérivées partielles associées sont :

$$\mathbf{B}_{i,\ldots} : \ \frac{\partial f_i}{\partial P_i}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial V_i}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial T_i}.$$

$$\mathbf{A}_{i,1} : \ \frac{\partial f_i}{\partial c}$$