

<i>Prénom</i>	<i>Nom</i>
---------------	------------

Contrôle continu facultatif du 8 octobre 2024 (51 points)**B. River (4 points)**

Commentez les propositions suivantes en **max. 2 lignes**.

- a) Une erreur systématique biaise toutes les mesures de la même quantité.

- b) La linéarisation d'une fonction des observations dépend de leurs écarts-types.

- c) Une matrice de corrélation peut contenir des éléments exprimés dans des unités différentes.

- d) On propage des erreurs maximales dans le quotient a/b . Implicitement, on suppose une valeur pour ρ_{ab} . Laquelle?

I walk the line (12 points)

Votre voisin vous propose de déplacer son compost et le vôtre dans un lieu commun. Avec prudence, vous prélevez deux échantillons équivalents de chaque compost et détectez une concentration bactérienne de $1.65 \cdot 10^6$ CFU¹/ml et de $2.0 \cdot 10^6$ CFU/ml, respectivement. Considérant que les deux observations suivent les distributions normales avec le même écart-type² de 10^6 CFU/ml :

- Construisez la matrice de covariance de x_1 et x_2 .
- En supposant que le résultat du mélange des deux cultures suive la distribution aléatoire, propagez les erreurs pour connaître l'écart-type σ_A du une fois les deux échantillons mélangés $x_A = x_1 + x_2$.
- Quelle est la probabilité que vous ne détectiez pas de bactéries une fois dans le compost commun ??
- En raison de la méthode choisie pour la détection de la concentration, les deux mesures sont corrélées à 90 %. Construisez la matrice de covariance de x_1 et x_2 .
- Propager les erreurs pour connaître l'écart-type σ_B du nouveau profit total $x_B = x_1 + x_2$.
- Quelle est la probabilité que vous ne détectiez aucune bactérie dans le compost commun en utilisant la même méthode d'observation ? *Dessinez si dessous.*

Facteur k	Probabilité d'être dans l'intervalle $[-k \sigma, +k \sigma]$
0.49	37.6 %
0.67	50 %
1	68.3 %
1.87	93.8 %
1.96	95 %
2	95.4 %
2.58	99 %

¹ CFU = Colony Forming Unit

² En réalité, les méthodes de détection sont beaucoup plus précises.

L. Date (10 points)

Le VO2max est une notion physiologique importante pour déterminer la performance dans les sports d'endurance. Le VO2max représente le débit maximal d'oxygène que l'on peut consommer lors d'un effort. Il représente la capacité à apporter de l'oxygène aux muscles, exprimée en $\text{ml} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. Dans la littérature, on trouve deux formules qui requièrent différents paramètres de l'athlète et de l'effort.

$$\text{VO2max}_1 = 133 - 0.17 \cdot w \left[\text{kg} \right] - 0.16 \cdot fc \left[\frac{\text{pulsations}}{\text{min}} \right] - 6650 \frac{t \left[\text{min} \right]}{d \left[\text{m} \right]} - 0.39 \cdot a \left[\text{ans} \right]$$

$$\text{VO2max}_2 = 33.3 + 0.17 \cdot \left(\frac{d \left[\text{m} \right]}{t \left[\text{min} \right]} - 133 \right)$$

On veut déterminer leur corrélation dans le cas suivant.

poids de l'athlète:	$w = 70 \text{ kg}$	$\sigma_w = 0.1 \text{ kg}$
fréquence cardiaque:	$fc = 180 \text{ pulsations/min}$	$\sigma_{fc} = 1 \text{ pulsations/min}$
durée:	$t = 15 \text{ min}$	$\sigma_t = 5 \text{ s}$
distance:	$d = 4000 \text{ m}$	$\sigma_d = 200 \text{ m}$
âge:	$a = 30 \text{ ans}$	$\sigma_a = 0 \text{ ans} \text{ (connu parfaitement)}$

Toutes les données sont supposées indépendantes.

a) Formez la matrice $\mathbf{K}_{\mathbf{u} \mathbf{u}}$. *valeurs numériques*

b) Calculez la matrice \mathbf{F} . *valeurs numériques*

c) Indiquez la taille de la matrice de covariance $\mathbf{K}_{\mathbf{y} \mathbf{y}}$.

d) Sans calcul, estimez la corrélation entre VO2max_1 et VO2max_2 , puis commentez brièvement.

S. Morning (10 points)

Le syndic est très fier de son nouveau modèle pour l'évolution de sa commune. Dans Python, il a défini une fonction pour prédire l'évolution de la population en 10 ans, qu'il applique à la période 2024–2034.

```
def predic10(popu2024, revenu, facsoc, conjon, densif):  
...  
return popu2034
```

Les données sont issues des registres officiels et d'un consensus politique. Un écart-type est indiqué, dans la même unité. Aucune donnée n'est disponible quant aux corrélations éventuelles.

popu2024	population en 2024	sigmap=100	% le 30 juin
revenu	rentrées fiscales prévues	sigmar=2'000	% kCHF/an
facsoc	facture sociale (péréquation)	sigmaf=5	% pourcents
conjon	pronostic conjoncturel	sigmac=6	% points
densif	surface à densifier (bâtiments)	sigmad=8	% ha

Pour estimer l'incertitude de son estimation, il a besoin de vous!

- Donnez un canevas de programme pour calculer `sigma_popu2034`.

Wabash (15 points)

Par échantillonnage, vous mesurez 3 concentrations d'un polluant: a , b et c . Vous considérez un écart-type uniforme: $\sigma_a = \sigma_b = \sigma_c = \sigma$, ainsi que les corrélations:

$$\rho_{ab} = 90\%, \rho_{ac} = 80\%, \rho_{bc} = 20\%.$$

- a) Formez la matrice de covariance de a , b et c .
- b) Etablissez la matrice \mathbf{F} pour calculer les différences de vos mesures: $y_1 = b - a$, $y_2 = c - b$ et $y_3 = a - c$.
- c) Calculez la matrice de covariance de ces différences.
- d) Calculez les écarts-types de ces différences.
- e) Comparez aux écarts-types originaux et commentez.
- f) Calculez les corrélations de ces différences.
- g) Le résultat surprend. Expliquez la cause des incohérences?

Préparez sur la table svp:

- 1 page A4 (recto) « triche »
- Calculatrice
- Crayon et/ou stylo